ノンホーンマジックセット法と関連性テストとの等価性

太田好彦† 井上克已†† 長谷川隆三†††

モデル生成型定理証明において，証明したいゴール（負節）に無関係である冗長な解釈の生成を避けるための手法がいくつか提案されている．その代表的手法として，SATCHMORE と呼ばれる定理証明器で用いられている関連性テストとホーンマジックセット法を拡張したノンホーンマジックセット法とがある．本論文では，Loveland らが提案している関連性テストよりも弱い関連性テストを定義し，それとノンホーンマジックセット法との関係を詳細に考察し，その関連性テストに基づく SATCHMORE により生成される解釈の総数が，ノンホーンマジックセット法によって生成されるそれとつねに同じであることを証明する．すなわち，ノンホーンマジックセットは，証明木の枝刈り能力に関して，弱い関連性テストと等価であることを明らかにする．

The Equivalence between Non-Horn Magic Sets and Relevancy Testing

Yoshihiko Ohta,† Katsumi Inoue†† and Ryuzo Hasegawa†††

On model generation theorem proving, there are several methods to avoid generating redundant interpretations that are irrelevant to the goal (negative clause) to be proved. As the typical methods, we consider both relevancy testing used in the SATCHMORE prover and non-Horn magic sets that are extensions of Horn magic sets. In this paper, we define a relevancy testing, which is weaker than that proposed by Loveland, *et al.* Then, we analyze relationships between non-Horn magic sets and weak relevancy testing in detail, and prove that the total number of generated interpretations with non-Horn magic sets is always the same as that with the SATCHMORE prover based on weak relevancy testing. Thus, we find that non-Horn magic sets and weak relevancy testing have the same power in pruning redundant branches of a proof tree.

1. はじめに

従来，モデル生成法[1)]と呼ばれるパラダイムに基づく定理証明器がいくつか提案されている．モデル生成法は，与えられた節集合の解釈を設定して，その解釈で充足されない節を検出し，その検出された節を充足するように解釈を拡張することを繰り返す．SATCHMO[1)]は，Prolog 上で，容易に実現されるモデル生成法に基づく定理証明器である．このモデル生成法では，ノンホーン節によって，複数の解釈が生成され，それらの拡張が OR 並列的に実行でき，並列/分散計算機システム上で高速に実行される MGTP[2)]と呼ばれるシステムもまた提案されている．しかしながら，ある解釈で充足されない節が複数存在する場合に，それらの節の評価順序によって，計算のコストがかなり異なる場合がある．特に，充足不能性を示すために無関係なノンホーン節を選んでしまうならば，その生成される解釈の多くが無駄となってしまう．このように，モデル生成法においては，無駄な解釈を生成しないような手法が必要とされている．

この目的に対して，評価すべき節として，“充足されない”という条件のほかに“負節に対してその節の後件アトムが全関連（totally relevant）である”という強い条件を課す手法が提案されている[3)]．この全関連であることを検査することを関連性テスト（relevancy testing）と呼び，SATCHMO にこの関連性テストを組み込んだ SATCHMORE と呼ばれるシステムが提案されている[3)]．同様の目的に対して，節の静的変換に基づいて上昇型証明と下降型証明とを融合したノン

† 職業能力開発大学校情報工学科
Department of Information Engineering, University of Industrial Technology
†† 神戸大学工学部電気電子工学科
Department of Electrical and Electronics Engineering, Kobe University
††† 九州大学大学院システム情報科学研究科
Department of Intelligent Systems, Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

ホーンマジックセット法が提案されている[4)~8)]．演繹データベースの分野ですでに提案されているマジックセット法[9)]は，ホーン節集合にのみ適用でき，ゴールと無関係な事実の生成を抑止する効果を有している．これをノンホーン節にまで拡張したノンホーンマジックセット法によれば，一階述語論理のモデル生成型定理証明器で，負節と無関係な節の評価を防ぐことができる．

このように，SATCHMO や MGTP によって生成される無駄な解釈の生成を抑止する手法として，関連性テストとノンホーンマジックセット法が提案されているが，両者の関係については明らかにされていない．いくつかの具体例[3)~5),7),8)]が示すところによれば，両者の枝刈り能力が等しいことが予想される．本論文では，Loveland ら[3)]が提案している関連性テストの条件を緩めた弱関連性テストを定義し，それとノンホーンマジックセット法との関係を詳細に考察する．そして，その弱関連性テストにより生成される解釈の総数が，ノンホーンマジックセット法によって生成されるそれとつねに同じであることを証明する．すなわち，ノンホーンマジックセット法は，モデル生成法による証明木の枝刈り能力に関して，弱関連性テストと等価であることを明らかにする．

本論文の構成は次のとおりである．まず，モデル生成型定理証明器で扱う節の定義を示す．次に，弱関連性テストおよびノンホーンマジックセット法，それぞれを組み込んだモデル生成法に基づく証明手続きを定義し，続いて，両者の枝刈り能力の等価性を明らかにする．また，Loveland ら[3)]が定義している関連性テストが，この弱関連性テストよりも強力である場合が存在することについても言及する．さらに，他の視点による比較も示す．

2. 節の定義

$A_1,\cdots,A_n$ $(n \geq 0)$ と $B_1,\cdots,B_m$ $(m \geq 0)$ とを一階述語論理のアトム，“,” を連言，“;” を選言，“$\rightarrow$” および “$\leftarrow$” を含意とすると，節は次のいずれかの形式である：

$$A_1,\cdots,A_n \rightarrow B_1;\cdots;B_m. \qquad (1)$$

$$B_1;\cdots;B_m \leftarrow A_1,\cdots,A_n. \qquad (2)$$

ここに，$A_1,\cdots,A_n$ を**前件**，$B_1;\cdots;B_m$ を**後件**という．$n=0$ の節を**正節**，$m=0$ の節を**負節**，$m \leq 1$ の節を**ホーン節**，$m>1$ の節を**ノンホーン節**という．節は，その後件に出現する変数がすべてその前件に出現していなければならないとし，この条件を満たす節を**値域限定された節**と呼ぶ．

SATCHMO[1)]や SATCHMORE[3)]は，基本的に前向き推論（上昇型証明法）に基づくが，与えられた節集合 S を後向き推論（下降型証明法）に基づく Prolog で直接扱えるホーン節の集合 BC とそれ以外の節 FC とに分けて，双方向推論に基づく実現方法も示されている．このとき，BC のホーン節は後向きに適用されるので，節の形式 (2) が用いられ，FC の節は節の形式 (1) が用いられる．また，MGTP[2)]は前向き推論（上昇型証明法）にのみ基づくので，節の形式 (1) のみが用いられる．なお，負節の後件アトムとして，恒偽を意味する特別なアトム “$\perp$” を用いる．

3. 関連性テスト

モデル生成型定理証明の目標は，与えられた節集合の充足不能性を示すこと，すなわち，生成されるすべての解釈が与えられた節集合のモデルとはなりえないことを示すことである．この目標に寄与するアトム，すなわち関連リテラルを定義する．なお，以下では，SLD 木や SLD 導出の知識[10)]を仮定する．ただし，計算規則はノードの最左アトムを選択するものとする．

定義 1 ホーン節の集合 BC のアトムの連言 G からの導出に関する**関連リテラル**とは，BC の G からの導出に関する SLD 木中の任意のノードの最左アトムである．ただし，BC の G からの SLD 木は有限であるとする．以下，BC の G からの導出に関するすべての関連リテラルの集合を $RL(BC,G)$ と記述する． ∎

充足不能性を示すことに寄与するアトムは，BC については $RL(BC,\perp)$ 中の要素である．FC については，次の 2 つの定義を考慮する必要がある．

定義 2 R をアトムの集合，FC を節の集合とする．このとき，

$$\begin{aligned} RC(R,FC) \equiv \{C\theta \mid\ & C \in FC, \\ & C=(A_1,\cdots,A_n \rightarrow B_1;\cdots;B_m), \\ & G=(B_1,\cdots,B_m),\ R \vdash G, \\ & \theta \text{ は } R \text{ からの } G \text{ の計算解代入 } \} \end{aligned}$$

を R に関する FC の**関連節集合**と呼ぶ．ここに，R からのアトムの連言 G の**計算解代入**とは，$R \cup \{\leftarrow G\}$ の SLD 反駁で用いられた最汎単一化代入の合成代入を G の変数への代入に制限したものである． ∎

この定義の R に関する FC の関連節集合は，R が関連リテラルの集合または次に定義する弱関連リテラル集合のとき意味を持つ．すなわち，ある節の後件のすべてのアトムが，関連リテラルあるいは弱関連リテラルの代入例であるとき，その節の後件アトムは全関連であるといい，後で定義する違反節であるかどうか

の検査の対象とする．このように，FC の節の後件アトムが全関連であるであるかどうかを検査すること，すなわち，関連節集合を求めることが，関連性テストである．

定義 3 BC をホーン節の集合，FC を節の集合，G をアトムの連言，R_k をアトムの集合とする．ただし，BC のいかなるアトムの連言からの導出に関する SLD 木も有限であるとする．このとき，手続き $rl(BC, FC, G, R_k)$ を次のように定義する．

(1) $R_{k+1} := R_k \cup RL(BC, G)$ として，$R_{k+1} = R_k$ ならば R_k を返して終了する．

(2) さもなければ，アトムの集合

$$\bigcup_{C \in RC(R_{k+1}, FC)} rl(BC, FC, ant(C), R_{k+1})$$

を返して終了する．ただし，$ant(C)$ は，節 $C : (A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ の前件 $(A_1, \cdots, A_n)$ である．

また，(BC, FC) に対する**弱関連リテラル集合**とは，$rl(BC, FC, \perp, \emptyset)$ が返すアトムの集合と定める． ∎

この定義 3 の弱関連リテラル集合は，6 章で述べるように，文献 3) 中の拡張関連リテラル（extended relevant literals）集合を包含する集合であるので，弱関連リテラル集合と名付けている．

例 1 次のようなホーン節の集合 BC と節集合 FC とを考え，(BC, FC) に対する弱関連リテラル集合 $rl(BC, FC, \perp, \emptyset)$ の計算手続きを説明する．

$$\begin{aligned} BC = \{&(\perp \leftarrow p(X), r(b)),\ (\perp \leftarrow p(X), s(b)),\\ &(\perp \leftarrow t(X)),\ (p(X) \leftarrow q(X)),\\ &(q(a) \leftarrow),\ (q(b) \leftarrow)\ \},\\ FC = \{&(u(X) \rightarrow r(X); s(X)),\\ &(p(X) \rightarrow t(X); u(X))\ \}. \end{aligned}$$

$R_0 = \emptyset$ であり，

$$RL(BC, \perp) = \{\perp, p(X), q(X), r(b), s(b), t(X)\}$$

である．よって，

$$R_1 := \{\perp, p(X), q(X), r(b), s(b), t(X)\}.$$

R_1 に関する FC の関連節集合は，$RC(R_1, FC) = \{\,(u(b) \rightarrow r(b); s(b))\,\}$ である．この要素の前件 $u(b)$ からの BC の導出に関する関連リテラル集合 $RL(BC, u(b))$ は，$\{u(b)\}$ である．よって，$R_2 := R_1 \cup \{u(b)\}$．この R_2 に関する FC の関連節集合 $RC(R_2, FC) = RC(R_1, FC) \cup \{(p(b) \rightarrow t(b); u(b))\}$ である．ここで，$RC(R_2, FC)$ 中の各節の前件に対して，次の 2 つの手続きが呼び出される：

(1) $rl(BC, FC, u(b), R_2)$：$R_2 \cup \{u(b)\} = R_2$ であるので，R_2 を返す．

(2) $rl(BC, FC, p(b), R_2)$：$RL(BC, p(b)) = \{p(b), q(b)\}$ であり，$R_3 := R_2 \cup RL(BC, p(b))$．述語 p, q は FC の節の後件に出現しないので，R_3 に関する FC の関連節集合は，$RC(R_2, FC)$ と等しい．そこで，$RC(R_2, FC)$ 中の各節の前件に対して，次の 2 つの手続きが呼び出される：

- $rl(BC, FC, u(b), R_3)$：$R_3 \cup RL(BC, u(b)) = R_3$ なので R_3 を返す．
- $rl(BC, FC, p(b), R_3)$：$R_3 \cup RL(BC, p(b)) = R_3$ なので R_3 を返す．

$R_3 \cup R_3$ を返す．

$R_2 \cup R_3$ を返す．すなわち，(BC, FC) に対する弱関連リテラル集合は，次の集合である：$\{\perp, p(X), q(X), r(b), s(b), t(X), u(b), p(b), q(b)\}$． ∎

次に，ある解釈で充足されない節（違反節）を定義する．

定義 4 BC をホーン節の集合，I をアトムの集合とする．このとき，値域限定された節 $C : (A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ に対して，$BC \cup I \vdash (A_1, \cdots, A_n)\theta$ かつ $BC \cup I \not\vdash (B_1; \cdots; B_m)\theta$ なる条件を満たす代入 θ が存在するならば，$C\theta$ は $BC \cup I$ に関する**違反節**であるという． ∎

ここで，$C\theta$ が $BC \cup I$ に関する違反節であることと $BC \cup I$ の最小モデルで $C\theta$ が充足されないこととは同値である．

次に定義する手続き呼び出しにおいて，$I = \emptyset$ とおいた $rt(BC, FC, \emptyset)$ は，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明手続きである．

定義 5 BC を値域限定されたホーン節の集合，FC を値域限定された節の集合，I を基礎アトムの集合とする．このとき，**弱関連リテラルに基づく SATCHMORE 手続き** $rt(BC, FC, I)$ を次のように定義する：

(1) $BC \cup I \vdash \perp$ ならば $unsat$ を返す．

(2) そうではなく，$(BC \cup I, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中のいかなる節の基礎例も $BC \cup I$ に関する違反節でないならば sat を返す．

(3) そうではなく，$(BC \cup I, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中のある節 C の基礎例 $C\theta$ が $BC \cup I$ に関する違反節であり，かつ，$C\theta$ のすべての後件アトム $B_j\theta$ に対して，$rt(BC, FC, I \cup \{B_j\theta\}) = unsat$ ならば（この $I \cup \{B_j\theta\}$ を SATCHMORE によって生成される**部分解釈**と呼ぶ）$unsat$ を返す；さもなければ sat を返す． ∎

文献 3) には，拡張関連リテラルに基づく SATCHMORE 手続きの健全性と完全性とが示されている．

すなわち，BC，FC を定義 5 と同様とするとき，$rt(BC, FC, \emptyset) = unsat$ であることの必要十分条件は，$BC \cup FC$ が充足不能であることである．ただし，ホーン節の集合 BC はいかなるゴールに対しても有限の SLD 木を構成することと違反節の選択にレベル飽和（level-saturation）法[1]を用いることを仮定している．また，弱関連リテラル集合は拡張関連リテラル集合を包含しているので，定義 5 の手続きが健全かつ完全であることがいえる．なお，ホーン節の集合 BC はいかなるゴールに対しても有限の SLD 木を構成するという条件を満足させるために，Prolog で無限ループを引き起こす可能性のあるホーン節を BC の要素ではなく，FC の要素とすることがある．

例 2 例 1 の BC，FC において，弱関連リテラル集合に基づく SATCHMORE 手続き，すなわち，手続き $rt(BC, FC, \emptyset)$ の実行について説明する．例 1 に示すように，まず，(BC, FC) に対する弱関連リテラル集合 $R := \{\perp, p(X), q(X), r(b), s(b), t(X), u(b), p(b), q(b)\}$ を計算する．その弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合 $\{(u(b) \rightarrow r(b); s(b)), (p(b) \rightarrow t(b); u(b))\}$ 中の BC に関する違反節は，$(p(b) \rightarrow t(b); u(b))$ である．そこで，次の (1) と (2) とに示す手続きが実行される：

(1) $rt(BC, FC, \{t(b)\})$: $BC \cup \{t(b)\} \vdash \perp$ なので $unsat$ を返す．

(2) $rt(BC, FC, \{u(b)\})$: $(BC \cup \{u(b)\}, FC)$ に対する弱関連リテラル集合が計算されるが，上の R と等しい．$BC \cup \{u(b)\}$ に関する違反節は $(u(b) \rightarrow r(b); s(b))$ である．ここで，$rt(BC, FC, \{u(b), r(b)\})$ と $rt(BC, FC, \{u(b), s(b)\})$ とが実行され，両者とも $unsat$ を返すので，$rt(BC, FC, \{u(b)\}) = unsat$ である．

以上より，$rt(BC, FC, \emptyset) = unsat$ となる． ∎

次に，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE 手続きによって生成される証明木を定義する．

定義 6 BC，FC を定義 5 と同様とする．このとき，(BC, FC) に関する**弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木**は，次のすべての項目を満たす木である．

- 木の各ノードは基礎アトムの集合である．
- 木の根は $\emptyset$ である．
- 任意のノード I に対して，$BC \cup I \vdash \perp$ ならば，ノード I は葉である．
- 任意のノードを I として，$(BC \cup I, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中のいかなる節の基礎例も $BC \cup I$ に関する違反節でないならば，ノード I は葉である．
- 葉以外の任意のノードを I として，$(BC \cup I, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中のある節 C の基礎例 $C\theta$ が $BC \cup I$ に関する違反節であるならば，ノード I は $I \cup \{B_1\theta\}, \cdots, I \cup \{B_m\theta\}$ なる子ノードを持つ．ただし，節 C は $(A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ なる節とする． ∎

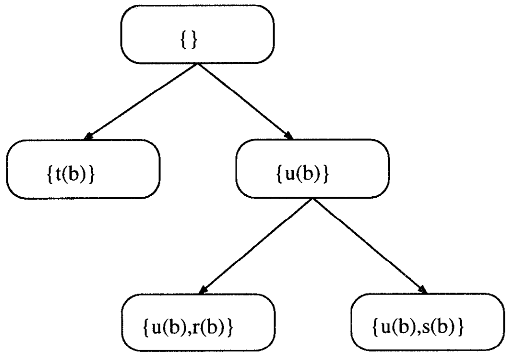


図 1 例 1 に示す (BC, FC) に関する弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木

Fig. 1 Proof tree by SATCHMORE based on weak relevant literals for (BC, FC) shown in Example 1.

例 3 例 1 の (BC, FC) に関する弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木は，**図 1** のようになり，その葉数は 3 である．ここに，FC の節の基礎例 $(p(a) \rightarrow t(a); u(a))$ は，BC に関する違反節であるが，$t(a)$ あるいは $u(a)$ を含むような部分解釈は生成されていないことに注意されたい（SATCHMO では生成される可能性がある）． ∎

4. ノンホーンマジックセット

4.1 変換法

与えられた節集合 S の各節 $C : (A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ に対して，$n = 0$ すなわち正節ならば，$(g(B_1), \cdots, g(B_m) \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ と変換し，それ以外の節の場合，次の節 C_0，C_i $(i = 1, \cdots, (n-1))$，C_n に変換する：

$$C_0 : g(B_1), \cdots, g(B_m) \rightarrow g(A_1), ct_{C,1}(\mathbf{V}_C).$$
$$C_i : ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i \rightarrow g(A_{i+1}), ct_{C,i+1}(\mathbf{V}_C).$$
$$C_n : ct_{C,n}(\mathbf{V}_C), A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m.$$

ここに，各 $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して，節 C_k を C の**変換第 k 節**と呼ぶ．また，g は新しく導入されたメタ述語であり，文献 4)〜8)，11) 中の述語 $goal$ の略記である．以下，任意のアトム A に対して，$g(A)$ を A の **g 付きアトム**と呼ぶ．$ct_{C,i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ は，文献 4)〜8)，11)，12) 中の述語 $cont_{C,i}$ の略記であり，文献 13) 中の補助マジック述語と同等の働きをする．

述語 $ct_{C,i}$ の添字 C はもとの節の**識別番号**，$\mathbf{V}_C$ はもとの節 C に含まれるすべての変数の組とする．さらに，節集合 S を構成する言語中に述語 g および $ct_{C,i}$ は出現しないものとし，その言語より構成されるアトムを**オブジェクトレベルのアトム**と呼ぶ．なお，$C_0,\cdots,C_{n-1}$ には，後件に2つのアトムの連言が出現するが，2つのホーン節と同一視する．すなわち，A をアトムの連言として，$(A \to B_1, B_2)$ なる形式は，$(A \to B_1)$ と $(A \to B_2)$ との2つのホーン節と見なす．

このように変換された節の集合を S の深さ優先の**ノンホーンマジックセット**（以下，単に，ノンホーンマジックセットまたは**NHM**）と呼び，$\Theta(S)$ と書く．前章で示したSATCHMOREとの対応を考察するために，BC を S のホーン節の集合，FC を S の BC 以外の節集合，$hc(\Theta(FC))$ を $\Theta(FC)$ のすべての**ホーン節の集合**，$nhc(\Theta(FC))$ を $\Theta(FC)$ のすべての**ノンホーン節の集合**とする．ただし，前章で述べたように FC にはホーン節が含まれていることもあり，その場合は，FC のホーン節の変換第 n 節は $nhc(\Theta(FC))$ の要素とし，$hc(\Theta(FC))$ の要素とはしないものする．

例4 例1と同様の BC, FC を考える．このとき，$\Theta(BC) \cup hc(\Theta(FC))$ は次の節からなる集合である：

$$g(\perp) \to g(p(X)), ct_{1,1}(X). \tag{3}$$
$$ct_{1,1}(X), p(X) \to g(r(b)), ct_{1,2}(X). \tag{4}$$
$$ct_{1,2}(X), r(b) \to \perp. \tag{5}$$
$$g(\perp) \to g(p(X)), ct_{2,1}(X). \tag{6}$$
$$ct_{2,1}(X), p(X) \to g(s(b)), ct_{2,2}(X). \tag{7}$$
$$ct_{2,2}(X), s(b) \to \perp. \tag{8}$$
$$g(\perp) \to g(t(X)), ct_{3,1}(X). \tag{9}$$
$$ct_{3,1}(X), t(X) \to \perp. \tag{10}$$
$$g(p(X)) \to g(q(X)), ct_{4,1}(X). \tag{11}$$
$$ct_{4,1}(X), q(X) \to p(X). \tag{12}$$
$$g(q(a)) \to q(a). \tag{13}$$
$$g(q(b)) \to q(b). \tag{14}$$
$$g(r(X)), g(s(X)) \to g(u(X)), ct_{5,1}(X). \tag{15}$$
$$g(t(X)), g(u(X)) \to g(p(X)), ct_{6,1}(X). \tag{16}$$

また，$nhc(\Theta(FC))$ は次の節からなる集合である：

$$ct_{5,1}(X), u(X) \to r(X); s(X). \tag{17}$$
$$ct_{6,1}(X), p(X) \to t(X); u(X). \tag{18}$$

∎

4.2 NHM用上昇型証明法

モデル生成法において，入力節は値域限定された節でなければならないが，与えられた節集合 S の各節が値域限定された節であっても，$hc(\Theta(S))$ の各節は値域限定された節とは限らない[4)~8)]．たとえば，前記例中のホーン節(3)，(6)および(9)は，値域限定された節ではない．ここでは，dom 述語[1)]や修飾子[7),8),13)]は用いず，ホーン節に対しては，次の2つの定義に基づき，変数を含むアトムの集合をあたかもホーン節集合の解釈のようにして扱う．

定義7 BC をホーン節の集合，E をアトムの集合とする．このとき，$T(BC, E)$ は，$E \vdash (A_1,\cdots,A_n)$ なる BC の任意の節 $(A_1,\cdots,A_n \to B)$ に対して，θ を E からの $(A_1,\cdots,A_n)$ の計算解代入とし，いかなる $B' \in E$ に対しても $B\theta = B'\sigma$ なる代入 σ が存在しないようなすべてのアトム $B\theta$ の集合である． ∎

定義8 BC をホーン節の集合，E_k をアトムの集合とする．このとき，**ナイーブ評価法** $nv(BC, E_k)$ は次の手続きである．

(1) $E_{k+1} := T(BC, E_k) \cup E_k$.

(2) $E_k = E_{k+1}$ であれば E_k を返して終了；さもなければ $nv(BC, E_{k+1})$ を返す． ∎

BC をホーン節の集合，FC を節の集合とし，次に定義する上昇型証明手続き bp の呼び出し $bp(\Theta(BC) \cup hc(\Theta(FC)), nhc(\Theta(FC)), \{g(\perp)\})$ によって，$BC \cup FC$ の充足不能性を判定する手法を**NHM法**と呼ぶ．以下，与えられたホーン節集合 BC，節集合 FC に対して，NHM法に基づく手続き bp の呼び出しの第1引数 $\Theta(BC) \cup hc(\Theta(FC))$ を $\Theta'(BC, FC)$ と記述する．

定義9 BC をホーン節の集合，FC を値域限定された節の集合，E をアトムの集合とする．このとき，**手続き** $bp(BC, FC, E)$ を次のように定義する：

(1) $M := nv(BC, E)$ とし，$M \vdash \perp$ ならば $unsat$ を返す．

(2) そうではなく，FC の節のいかなる基礎例も M に関する違反節でなければ sat を返す．

(3) そうではなく，FC のある節 C の基礎例 $C\theta$ が M に関する違反節であり，かつ，そのすべての後件アトム $B_j\theta$ に対して，$bp(BC, FC, M \cup \{B_j\theta\}) = unsat$ ならば（この $M \cup \{B_j\theta\}$ を**モデル候補**と呼ぶ）$unsat$ を返す；さもなければ sat を返す． ∎

例5 例1に示す BC, FC に対して，NHM法を適用した例を示す．まず，次の2つの節集合に変換する：

$$\Theta'(BC, FC) \equiv \Theta(BC) \cup hc(\Theta(FC)),$$
$$nhc(\Theta(FC)).$$

これらの変換結果は，例4に示している．次に，手続き $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), \{g(\perp)\})$ を実行する．ここで，$nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\perp)\})$ が計算され，次の集合 M_0 が得られる：

$M_0 := \{\ g(\bot), g(p(X)), ct_{1,1}(X), ct_{2,1}(X),$
$g(t(X)), ct_{3,1}(X), g(q(X)), ct_{4,1}(X),$
$q(a), q(b), p(a), p(b), g(r(b)), ct_{1,2}(a),$
$ct_{1,2}(b), g(s(b)), ct_{2,2}(a), ct_{2,2}(b),$
$g(u(b)), ct_{5,1}(b), ct_{6,1}(b)\ \}.$

ここで，代入 $\{X := b\}$ による節 (18) の基礎例は M_0 に関する違反節であり，次の (1) および (2) に示す 2 つの手続きが実行される．

(1) $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), M_0 \cup \{t(b)\})$：$nv(\Theta'(BC, FC), M_0 \cup \{t(b)\})$ が計算され，アトムの集合 $M_1 := M_0 \cup \{t(b), \bot\}$ が得られる．ここで，$M_1 \vdash \bot$ であり $unsat$ を返す．

(2) $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), M_0 \cup \{u(b)\})$：$nv(\Theta'(BC, FC), M_0 \cup \{u(b)\})$ が計算され，$M_1 := M_0 \cup \{u(b)\}$ が得られる．ここで，代入 $\{X := b\}$ による節 (17) の基礎例が M_1 に関する違反節であり，次の 2 つの手続きが呼び出される：

- $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), M_1 \cup \{r(b)\})$：$nv(\Theta'(BC, FC), M_1 \cup \{r(b)\})$ が計算され，$M_2 := M_1 \cup \{r(b), \bot\}$ が得られる．ここで，$M_2 \vdash \bot$ であり $unsat$ を返す．
- $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), M_1 \cup \{s(b)\})$：$nv(\Theta'(BC, FC), M_1 \cup \{s(b)\})$ が計算され，$M_2 := M_1 \cup \{s(b), \bot\}$ が得られる．ここで，$M_2 \vdash \bot$ であり $unsat$ を返す．

よって，$unsat$ を返す．ゆえに，手続き $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), \{g(\bot)\})$ は $unsat$ を返す． ∎

次に，NHM 法によって生成される証明木[6]を定義する．

定義 10 BC，FC を定義 9 と同様とする．このとき，(BC, FC) に関する **NHM 法の証明木**は，次のすべての項目を満たす木である．

- 木の各ノードはアトムの集合である．
- 木の根は $\{g(\bot)\}$ である．
- 任意のノード E に対して，$nv(\Theta'(BC, FC), E) \vdash \bot$ ならば，ノード E は葉である．
- 任意のノード E に対して，$nhc(\Theta(FC))$ 中のいかなる節の基礎例も $M \equiv nv(\Theta'(BC, FC), E)$ に関する違反節でないならば，ノード E は葉である．
- 葉以外の任意のノード E に対して，$nhc(\Theta(FC))$ 中のある節 $C' : (ct_{C,n}(\mathbf{V}_C), A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ の基礎例 $C'\theta$ が $M \equiv nv(\Theta'(BC, FC), E)$ に関する違反節であるならば，ノード E は $M \cup \{B_1\theta\}, \cdots, M \cup \{B_m\theta\}$ なる子ノードを持つ． ∎

例 6 例 1 の (BC, FC) に関する NHM 法の証明木は，**図 2** のようになり，その葉数は 3 である．図中の M は，例 5 中の M_0 と同一である． ∎

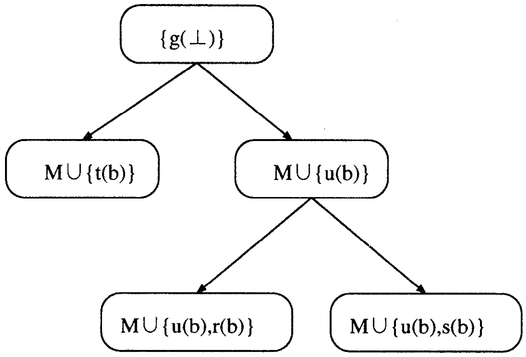


図 2 例 1 に示す (BC, FC) に関する NHM 法の証明木
Fig. 2 Proof tree by the non-Horn magic set method for (BC, FC) shown in Example 1.

例 3 で示したように弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木の葉数が 3，本例が示すように NHM 法の証明木の葉数も 3 となり，これらの例は両者が一致することを示唆している．

5. 等 価 性

弱関連リテラルに基づく SATCHMORE により生成される証明木の葉数が，NHM 法により生成される証明木の葉数と一致することを理論的に示す．

まず，ホーン節の集合に関する下降型証明と上昇型証明との関係について，次の 2 つの補題を示す．これらは，ホーン節集合における上昇型証明と下降型証明に関する文献 12) の結果を用いて容易に証明できる．

補題 1 BC をホーン節の集合，G をオブジェクトレベルのアトムとし，BC の G からの導出に関する SLD 木が有限であるとする．このとき，オブジェクトレベルの任意のアトム L に対して，$RL(BC, G) \vdash L$ であるための必要十分条件は $nv(\Theta(BC), \{g(G)\}) \vdash g(L)$ である． ∎

補題 2 BC，G を上と同様とする．このとき，任意の代入 θ に対して，$BC \vdash G\theta$ であるための必要十分条件は $nv(\Theta(BC), \{g(G)\}) \vdash G\theta$ である． ∎

補題 1 より，次の系が容易に証明される．

系 1 BC をホーン節の集合，$n \geq 1$ として G をオブジェクトレベルのアトムの連言 $(A_1, \cdots, A_n)$ とする．また，各 $i = 1, \cdots, n-1$ に対して，$G_i \equiv (ct_{G,i}(\mathbf{V}_G), A_i \rightarrow g(A_{i+1}), ct_{G,i+1}(\mathbf{V}_G))$ とし，$\mathcal{G} \equiv \{G_1, \cdots, G_{n-1}\}$ とする．ただし，G の識別番号は BC 中の節のものとは異なるとする．このとき，オブジェクトレベルの任意のアトム L に対して，$RL(BC, G) \vdash L$ であるための必要十分条件は

$nv(\Theta(BC) \cup \mathcal{G}, \{g(A_1), ct_{G,1}(\mathbf{V}_G)\}) \vdash g(L)$ である． ∎

また，補題 2 および NHM 変換節の形式より，次の系が容易に証明される．

系 2 BC をホーン節の集合，FC を節の集合とするとき，オブジェクトレベルの任意のアトム G に対して，$BC \vdash G$ かつ $nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\perp)\}) \vdash g(G)$ であるための必要十分条件は $nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\perp)\}) \vdash G$ である． ∎

次の定理は，SATCHMORE における弱関連リテラルと NHM の g 付きアトムとの関係を示す．

定理 1 FC を値域限定された節の集合，BC を値域限定されたホーン節の集合，$R \equiv rl(BC, FC, \perp, \emptyset)$，$M \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\perp)\})$ とする．ただし，BC のいかなるアトムからの導出に関する SLD 木も有限であるとする．このとき，オブジェクトレベルの任意のアトム L に対して，$R \vdash L$ であることの必要十分条件は $M \vdash g(L)$ である．

証明：

必要条件： $R \vdash L$ を仮定し，手続き rl の再帰呼び出し回数 $l \geq 1$ に関する帰納法で $M \vdash g(L)$ を証明する．そこで，各 $k = 1, \cdots, l$ 回目の手続き rl の再帰呼び出しを $rl(BC, FC, G_k, R_k)$ と記述する．

$l = 1$ の場合：$R_1 = RL(BC, \perp)$ であるので，補題 1 より明らか．

$l > 1$ の場合：$k < l$ なる k に対して $R_k \not\vdash L$ であり，$R_l \vdash L$ の場合を証明する（さもなければ，帰納法の仮定より明らか）．このとき，L は，$RC(R_{l-1}, FC)$ 中のある節 $C\theta$ の前件 $(A_1, \cdots, A_n)\theta$ からの BC の導出に関する関連リテラルの代入例である．よって，$C\theta$ の後件 $(B_1; \cdots; B_m)\theta$ に対して，$R_{l-1} \vdash (B_1, \cdots, B_m)\theta$．帰納法の仮定より，$M \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m))\theta$．これと，その節 C の変換第 0 節 C_0 が $\Theta'(BC, FC)$ の要素であることにより，$M \vdash (g(A_1), ct_{C,1}(\mathbf{V}_C))\theta$．さらに，その節 C の変換第 i 節 C_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ も $\Theta'(BC, FC)$ の要素であること，L が BC の $(A_1, \cdots, A_n)\theta$ からの導出に関する関連リテラルの代入例であることおよび系 1 より $M \vdash g(L)$．

十分条件： $M \vdash g(L)$ を仮定し，手続き nv の再帰呼び出し回数 $l \geq 0$ に関する帰納法で $R \vdash L$ を証明する．そこで，各 $k = 0, \cdots, l$ 回目の手続き nv の再帰呼び出しを $nv(\Theta'(BC, FC), E_k)$ と記述する．

$l = 0$ の場合：$E_0 = \{g(\perp)\}$ であるので定義 3 より明らか．

$l > 0$ の場合：$g(L)$ が E_{l-1} 中のアトムのある代入例であるならば，$E_{l-1} \vdash g(L)$ であり，帰納法の仮定より明らか．$g(L)$ が，E_{l-1} 中のいかなるアトムの代入例でない場合を示す．すなわち，$E_{l-1} \not\vdash g(L)$ かつ $E_l \vdash g(L)$ の場合において，$R \vdash L$ を示す．ここで，定義 7 より，次の 2 つケースを考える：

ケース 1 $\Theta'(BC, FC)$ 中のある変換第 0 節

$$C_0 : (g(B_1), \cdots, g(B_m) \rightarrow g(A_1), ct_{C,1}(\mathbf{V}_C))$$

に対して，$E_{l-1} \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m))$ であり，θ を E_{l-1} からの $(g(B_1), \cdots, g(B_m))$ の計算解代入であるとし，$g(A_1)\theta$ が E_{l-1} 中のいかなる g 付きアトムの代入例ではなく，かつ $g(L)$ が $g(A_1)\theta$ の代入例であるケース：

代入 θ が E_{l-1} からの $(g(B_1), \cdots, g(B_m))$ の計算解代入であることにより，$E_{l-1} \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m))\theta$．帰納法の仮定より，$R \vdash (B_1, \cdots, B_m)\theta$．ここで，$m > 1$ または $m = 1$ であり，各々の場合に分けて証明を行う：

$m > 1$ の場合： C_0 のもとの節 C を $(A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ とすれば，$C\theta$ は R に関する FC の関連節集合の要素の代入例である．定義 3 より，BC の $(A_1, \cdots, A_n)\theta$ からの導出に関する SLD 木中のノードの最左アトムは，R の要素の代入例である．ゆえに，$A_1\theta$ の代入例 L に対して，$R \vdash L$．

$m = 1$ の場合： この場合，Γ をあるアトムの連言として，$(B_1, \Gamma)\theta$ が R を計算するためのある SLD 木中のノードの代入例となっている．C_0 のもとの節 C を $(B_1 \leftarrow A_1, \cdots, A_n)$ とすれば，$C \in BC$ から，$(B_1, \Gamma)\theta$ の子ノードとして，$(A_1, \cdots, A_n, \Gamma)\theta$ が出現する．ゆえに，$A_1\theta$ は R を計算するためのある SLD 木中のノードの最左アトムの代入例であり，$A_1\theta$ の代入例 L に対して，$R \vdash L$．

ケース 2 $\Theta'(BC, FC)$ 中のある変換第 $i > 0$ 節

$$C_i : (ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i \rightarrow g(A_{i+1}), ct_{C,i+1}(\mathbf{V}_C))$$

に対して，$E_{l-1} \vdash (ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i)$ であり，θ を E_{l-1} からの $(ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i)$ の計算解代入であるとし，$g(A_{i+1})\theta$ が E_{l-1} 中のいかなる g 付きアトムの代入例ではなく，かつ $g(L)$ が $g(A_{i+1})\theta$ の代入例であるケース：

代入 θ が E_{l-1} からの $(ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i)$ の計算解代入であるので，

$$E_{l-1} \vdash (ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i)\theta. \qquad (19)$$

このことと，$j = (i-1), \cdots, 1$ に対して，$C_j \in \Theta'(BC, FC)$ より，

$$E_{l-1} \vdash (g(A_{j+1}), ct_{C,j}(\mathbf{V}_C), A_j)\theta. \qquad (20)$$

特に，$E_{l-1} \vdash ct_{C,1}(\mathbf{V}_C)\theta$ および $C_0 \in \Theta'(BC, FC)$ より，

$$E_{l-1} \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m), g(A_1))\theta. \tag{21}$$

帰納法の仮定より，$R \vdash (B_1, \cdots, B_m)\theta$．ここで，$m > 1$ または $m = 1$ であり，各々の場合に分けて証明を行う：

$m > 1$ の場合： C_i のもとの節 $C : (A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ に対して，$C\theta$ は R に関する FC の関連節集合の要素の代入例である．ゆえに，BC の $(A_1, \cdots, A_n)\theta$ からの導出に関する SLD 木中のノードの最左アトムは，R の要素の代入例である．ここで，式 (19)，式 (20) および系 2 により，各 $j = 1, \cdots, i$ に対して，$BC \vdash A_j\theta$．よって，$(A_{i+1}, \cdots, A_n)\theta$ は BC の $(A_1, \cdots, A_n)\theta$ からの導出に関する SLD 木中に出現するノードの代入例である．ゆえに，$A_{i+1}\theta$ の代入例 L に対して，$R \vdash L$.

$m = 1$ の場合： この場合，Γ をあるアトムの連言として，$(B_1, \Gamma)\theta$ が R を計算するためのある SLD 木中のノードの代入例となっている．C_i のもとの節 C を $(B_1 \leftarrow A_1, \cdots, A_n)$ とすれば，$C \in BC$ から，$(B_1, \Gamma)\theta$ の子ノードとして，$(A_1, \cdots, A_n, \Gamma)\theta$ が出現する．上と同様に，各 $j = 1, \cdots, i$ に対して，$BC \vdash A_j\theta$．よって，$(A_{i+1}, \cdots, A_n, \Gamma)\theta$ は，R を計算するためのその SLD 木中のノードの代入例である．$A_{i+1}\theta$ は，その SLD 木中のノードの最左アトムの代入例であり，さらに，L は $A_{i+1}\theta$ の代入例であるので $R \vdash L$. ∎

次の定理は，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木の深さ 1 のノードの数と NHM 法の証明木の深さ 1 のノード数とが同一であることを示す．

定理 2 FC，BC を定理 1 と同様とする．このとき，(BC, FC) に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中の節の基礎例 $C\theta : (A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)\theta$ が BC に関する違反節であることの必要十分条件は C の変換第 n 節 C_n : $(ct_{C,n}(\mathbf{V}_C), A_n \rightarrow B_1; \cdots; B_m)$ の基礎例 $C_n\theta$ が $M \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\perp)\})$ に関する違反節であることである．

証明：

必要条件： (BC, FC) に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中の節の基礎例 $C\theta$ が BC に関する違反節であることを仮定する．

$C\theta$ は (BC, FC) に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中の節の基礎例であるから，C の各後件アトム $B_1, \cdots, B_m$ に対して，定理 1 より，

$$M \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m))\theta. \tag{22}$$

これと FC の節 C の変換第 0 節 C_0 が $\Theta'(BC, FC)$ の要素であることより，

$$M \vdash (g(A_1), ct_{C,1}(\mathbf{V}_C))\theta. \tag{23}$$

$C\theta$ は BC に関する違反節であることから，

$$BC \vdash (A_1, \cdots, A_n)\theta, \tag{24}$$

$$BC \nvdash (B_1; \cdots; B_m)\theta. \tag{25}$$

式 (23)，式 (24)，$i = 1, \cdots, (n-1)$ に対して $C_i \in \Theta'(BC, FC)$ および系 2 より，

$$M \vdash (g(A_{i+1}), ct_{C,i+1}(\mathbf{V}_C))\theta. \tag{26}$$

さらに，式 (25) および系 2 より，

$$M \nvdash (B_1; \cdots; B_m)\theta. \tag{27}$$

また，式 (24) と式 (26) および系 2 から，$M \vdash A_n\theta$．これと式 (26)，式 (27) から $C_n\theta$ は M に関する違反節である．

十分条件： 節 C の変換第 n 節の基礎例 $C_n\theta$ が M に関する違反節であることを仮定する．すると，

$$M \vdash (ct_{C,n}(\mathbf{V}_C), A_n)\theta, \tag{28}$$

$$M \nvdash (B_1; \cdots; B_m)\theta. \tag{29}$$

各 $i = (n-1), \cdots, 1$ に対して，節 C の変換第 i 節 C_i が $\Theta'(BC, FC)$ の要素であることと式 (28) とにより，

$$M \vdash (g(A_{i+1}), ct_{C,i}(\mathbf{V}_C), A_i)\theta. \tag{30}$$

次に，変換第 0 節 $C_0 \in \Theta'(BC, FC)$ および式 (30) より，

$$M \vdash (g(B_1), \cdots, g(B_m), g(A_1))\theta. \tag{31}$$

定理 1 より，$rl(BC, FC, \perp, \emptyset) \vdash (B_1, \cdots, B_m)\theta$．ゆえに，節 $C\theta$ は (BC, FC) に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中の節の基礎例である．

また，式 (28)，式 (30) および系 2 より，$BC \vdash (A_1, \cdots, A_n)\theta$．さらに，式 (31)，式 (29) および系 2 より，$BC \nvdash (B_1, \cdots, B_m)\theta$．ゆえに，$C\theta$ は BC に関する違反節である． ∎

次の定理は，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE の証明木の任意の深さのノード数と NHM 法の証明木の対応する深さのノード数とが同一であることを示す．

定理 3 FC，BC を定理 1 と同様，I を基礎アトムの集合とする．ただし，$BC \cup I$ のいかなるアトムからの導出に関する SLD 木も有限であるとする．また，手続き rt のトップ呼び出しを $rt(BC, FC, \emptyset)$，手続き bp のトップ呼び出しを $bp(\Theta'(BC, FC), nhc(\Theta(FC)), \{g(\perp)\})$ とする．このとき，任意の基礎アトム B に対して，手続き rt の

トップ呼び出しから部分解釈 $I \cup \{B\}$ が生成されることの必要十分条件は，手続き bp のトップ呼び出しからモデル候補 $M \cup \{B\}$ が生成されることである．ここに，$M \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I)$ である．

証明：

必要条件：部分解釈 $I \cup \{B\}$ が生成されることを仮定する．このときまでに生成される部分解釈の列を $I_1, \cdots, I_l$ $(l \geq 1)$ とする．すると，$k = 1, \cdots, l$ に対して，B^k をある基礎アトムとし，$I_k \equiv I_{k-1} \cup \{B^k\}$，$I_0 \equiv \emptyset$，$I_{l-1} = I$ および $B^l = B$ である．ここで，いかなる $l \geq 1$ において生成された部分解釈 $I_{l-1} \cup \{B^l\}$ に対しても必ずモデル候補 $M_{l-1} \cup \{B^l\}$ が生成されることを l に関する帰納法で示す．ただし，$M_{l-1} \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I_{l-1})$ である．

$l = 1$ の場合：定理 2 より明らか．

$l > 1$ の場合：帰納法の仮定：$k = 1, \cdots, l-1$ に対して，

$$M_{k-1} \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I_{k-1}) \tag{32}$$

として，モデル候補 $M_{k-1} \cup \{B^k\}$ が生成される．

I_k に関する上の仮定より，$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{l-2} \subset I_{l-1}$ である．これと，式 (32) と定義 8 とにより，$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-2}$．さらに，$M_{l-1}$ の定義より，$M_{l-2} \subset M_{l-1}$．また，NHM の定義，定義 8，定義 9 および $k = 1, \cdots, l-1$ に対してモデル候補 $M_{k-1} \cup \{B^k\}$ が生成されることより，$M_{k-1} \vdash g(B^k)$．これと $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-2} \subset M_{l-1}$ より，$M_{l-1} \vdash (g(B^1), \cdots, g(B^{l-1}))$．ゆえに，

$$\begin{aligned} M_{l-1} &\equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I_{l-1}) \\ &= nv(\Theta'(BC \cup I_{l-1}, FC), \{g(\bot)\}). \end{aligned}$$

$(BC \cup I_{l-1}, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中のある節の基礎例 $(A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1; \cdots; B^l; \cdots; B_m)$ が $BC \cup I_{l-1}$ に関する違反節であることと定理 2 より，その節の変換第 n 節の対応する基礎例が M_{l-1} に関する違反節である．よって，$M_{l-1} \cup \{B^l\}$ なるモデル候補が生成される．

十分条件：モデル候補 $M \cup \{B\}$ が生成されることを仮定する．このときまでに生成されるモデル候補の列を $M_0, \cdots, M_l$ $(l \geq 1)$ とする．すると，$k = 1, \cdots, l$ に対して，

$$M_k \equiv nv(\Theta'(BC, FC), M_{k-1} \cup \{B^k\}). \tag{33}$$

ここに，B^k はある基礎アトムである．ただし，$M_0 \equiv nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\})$，$M_{l-1} = M$ および $B^l = B$ である．ここで，いかなる $l \geq 1$ において生成されたモデル候補 $M_{l-1} \cup \{B^l\}$ に対しても必ず部分解釈 $I_{l-1} \cup \{B^l\}$ が生成されることを l に関する帰納法で示す．ここに，I_{l-1} は，$M_{l-1} = nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I_{l-1})$ を満たす最小の基礎アトムの集合である．

$l = 1$ の場合：定理 2 より明らか．

$l > 1$ の場合：帰納法の仮定：$k = 1, \cdots, l-1$ に対して，部分解釈 $I_k \equiv I_{k-1} \cup \{B^k\}$ が生成される．ここに，$I_0 = \emptyset$．

帰納法の仮定と式 (33) とにより，$k = 1, \cdots, l-1$ に対して，

$$M_k = nv(\Theta'(BC, FC), \{g(\bot)\} \cup I_k) \tag{34}$$

が成り立つ．また，式 (33)，NHM の定義，定義 8 および定義 9 から，$k = 1, \cdots, l$ に対して，$M_{k-1} \vdash g(B^k)$．さらに，定義 8 および定義 9 から，$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{l-1}$．よって，$M_{l-1} \vdash (g(B^1), \cdots, g(B^{l-1}), g(B^l))$．これと式 (34) より，$M_{l-1} = nv(\Theta'(BC \cup I_{l-1}, FC), \{g(\bot)\})$．$FC$ のある節 C の変換第 n 節 C_n の基礎例

$$ct_{C,n}(\mathbf{V}'_C), A_n \rightarrow B_1; \cdots; B^l; \cdots; B_m$$

が M_{l-1} に関する違反節であることと定理 2 より，もとの節の対応する基礎例が，$(BC \cup I_{l-1}, FC)$ に対する弱関連リテラル集合に関する FC の関連節集合中の節の基礎例であり，かつ $BC \cup I_{l-1}$ に関する違反節である．よって，$I_{l-1} \cup \{B^l\}$ なる部分解釈が生成される．なお，$\mathbf{V}'_C$ は $\mathbf{V}_C$ の対応する基礎例である．∎

この定理は，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE によって，ある部分解釈が生成されれば，それに対応したモデル候補が NHM 法を用いた上昇型計算で生成されるとともにその逆も成り立つことを示している．すなわち，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE で生成される部分解釈と NHM 法により生成されるモデル候補との間に 1 対 1 の対応関係がある．よって，弱関連リテラルに基づく SATCHMORE で生成される証明木の葉数が，NHM 法により生成される証明木の葉数と一致する．すなわち，まったく異なる背景と手法を持つ両者が，枝刈り能力に対して等価であることが示された．

6. 考　察

定義 3 で示した弱関連リテラル計算に従えば，部分解釈 I が大きくなるのに従い，$(BC \cup I, FC)$ に対する（弱）関連リテラル集合が単調に増加する．しかしながら，文献 3) に示されている SATCHMORE では，部分解釈 I が大きくなるのに対して，$(BC \cup I, FC)$

に関する（拡張）関連リテラル集合は減少することもある．これは，定義3による弱関連リテラル集合の定義が文献3)に示されている拡張関連リテラル集合と次のように異なるためである．すなわち，文献3)の(BC, FC)に対する拡張関連リテラル集合の計算手続きは，定義3中のステップ(1)と(2)の間に次のステップ(1.5)が挿入されたものである．

(1.5) さもなければ，$\boldsymbol{RC(R_{k+1}, FC)}$ 中のある節の基礎例が $\boldsymbol{BC}$ に関する違反節であるならば，$\boldsymbol{R_{k+1}}$ を返して終了する．

よって，弱関連リテラル集合は，拡張関連リテラル集合を包含するものである．

このような違いにより，弱関連リテラルに基づくSATCHMOREが生成する部分解釈が，この拡張関連リテラルに基づくSATCHMORE[3]によって，生成されない場合がある．特に，次の例7のように$(a \leftrightarrow e; f)$なる同値式（ループ）が節集合中に含まれるような場合，拡張関連リテラルに基づくSATCHMOREの枝刈り能力が，弱関連リテラルに基づくSATCHMOREやNHM法の枝刈り能力よりも高くなることがある．

例7 ホーン節の集合 $BC = \{\ (\perp \leftarrow p),\ (\perp \leftarrow q),\ (a \leftarrow f),\ (a \leftarrow e),\ (a \leftarrow b),\ (b \leftarrow)\ \}$ および節の集合

$$FC = \{\ (a \rightarrow e; f), \qquad (35)$$

$$(a \rightarrow p; q)\ \} \qquad (36)$$

とする．まず，$BC \cup FC$ の充足不能性を弱関連リテラルに基づくSATCHMORE手続き rt により判定する場合を示す：

(1) $RL(BC, \perp) = \{\perp, p, q\}$ が計算される．これに対する FC の関連節集合は，節(36)のみからなる集合である．

(2) $RL(BC, a) = \{f, e, b\}$ が計算される．次に，$RL(BC, \perp) \cup RL(BC, a)$ に対する FC の関連節集合は FC となる．FC の各要素に対して，もう一度，手続き rl が再帰呼び出しされ，rl は終了する．すなわち，(BC, FC) に対する弱関連リテラル集合は $\{\perp, p, q, f, e, b\}$ である．

(3) 次に，手続き rt において，その関連節集合 FC から，BC に関する違反節が非決定的に選択される．節(35)も節(36)も BC に関する違反節であるので，節(35)によって部分解釈が生成される可能性もある．

一方，文献3)に示されているSATCHMOREにおいては，前記ステップ(1.5)が手続き rl に導入されており，上記ステップ(1)において，節(36)のみからなる関連節集合が求まった段階で，節(36)が BC に関する違反節であるかどうか検査され，これが違反節であると分かると手続き rl が終了する．すなわち，(BC, FC) に対する拡張関連リテラル集合は $\{\perp, p, q\}$ である．よって，節(35)による部分解釈の生成は抑制される． ∎

しかしながら，拡張関連リテラルに基づくSATCHMOREでは，部分解釈が増加した場合の非単調な拡張関連リテラル集合の計算を実現するために，それまで計算した拡張関連リテラル集合の要素をすべて削除し，改めて拡張関連リテラル集合を計算している．一方，NHM法では，上昇型証明に基づくので，弱関連リテラル集合の要素に対応する g 付きアトムの再計算は抑止される．このことを例を用いて説明する．例2(2)の $rt(BC, FC, \{u(b)\})$ の実行において，SATCHMOREでは，まず，$(BC \cup \{u(b)\}, FC)$ に対する拡張関連リテラル集合の計算がなされる．この場合は $RL(BC \cup \{u(b)\}, \perp)$ であるが，この計算は以前に計算した $RL(BC, \perp)$ と同様の計算を繰り返すことになる．一方，NHM法では，例5(2)に示すように，以前に計算された M_0 中の g 付きアトムを使用し，この段階において，g 付きアトムが再計算されることはない．

7. おわりに

弱関連リテラルに基づくSATCHMOREの証明木の葉数が，ノンホーンマジックセット法の証明木の葉数と一致することを理論的に示した．この弱関連リテラル集合は，拡張関連リテラル集合を包含する集合である．よって，Lovelandら[3]が提案している拡張関連リテラルに基づくSATCHMOREの証明木の葉数は，ノンホーンマジックセット法の証明木の葉数よりも小さくなるケースが存在する．しかしながら，拡張関連リテラルに基づくSATCHMOREに対して，ノンホーンマジックセット法は，弱関連リテラル集合の要素に対応する g 付きアトムの再計算が抑止されるという効果がある．今後の課題として，ノンホーンマジックセット法がこの拡張関連リテラルに基づくSATCHMOREと等価になる場合は，いかなる性質を持った入力節集合の場合であるか，それを明示することがあげられる．

謝辞 示唆を与えてくださった慶應義塾大学古川康一教授，コメントをいただいたDuke大学D.W. Loveland教授ならびに名古屋工業大学世木博久教授に感謝します．

参 考 文 献

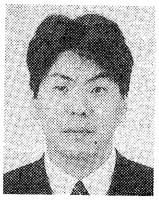
1) Manthey, R. and Bry, F.: SATCHMO: A The-

orem Prover Implemented in Prolog, *Proc. 9th Int. Conf. on Automated Deduction*, pp.415–434 (1988).
2) Fujita, H. and Hasegawa, R.: A Model Generation Theorem Prover in KL1 Using a Ramified-Stack Algorithm, *Proc. 8th Int. Conf. on Logic Programming*, pp.535–548 (1991).
3) Loveland, D.W., Reed, D.W. and Wilson, D.S.: SATCHMORE: SATCHMO with RElevancy, *J. Automated Reasoning*, Vol.14, No.2, pp.325–351 (1995).
4) 太田好彦，井上克已，長谷川隆三，中島　誠：ノンホーン・マジックセット，Technical Memo TM-1227，新世代コンピュータ技術開発機構 (1992).
5) Hasegawa, R., Ohta, Y. and Inoue, K.: Non-Horn Magic Sets and their Relation to Relevancy Testing, Technical Report TR-834, Institute for New Generation Computer Technology, Dagstuhl-Seminar on Deduction (1993).
6) 赤埴淳一，井上克已，長谷川隆三：様相節変換に基づくボトムアップ型様相論理証明法，情報処理学会論文誌，Vol.36, No.4, pp.822–831 (1995).
7) 長谷川隆三，越村三幸，井上克已，太田好彦：上昇型定理証明のためのノンホーン・マジックセット，システム情報科学研究科報告 1，九州大学大学院システム情報科学研究科 (1996).
8) 長谷川隆三，井上克已，太田好彦，越村三幸：上昇型定理証明の探索効率を高めるノンホーン・マジックセット，情報処理学会論文誌，Vol.38, No.3, pp.453–461 (1997).
9) Bancilhon, F., Maier, D., Sagiv, Y. and Ullman, J.D.: Magic Sets and Other Strange Ways to Implement Logic Programs, *Proc. 5th ACM SIGMOD-SIGACT Symposium on Principles of Database Systems*, pp.1–15 (1986).
10) Lloyd, J.W.: *Foundations of Logic Programming*, 2nd edition, Springer-Verlag (1987).
11) Stickel, M.E.: Upside-down Meta-interpretation of the Model Elimination Theorem-proving Procedure for Deduction and Abduction, *J. Automated Reasoning*, Vol.13, No.2, pp.189–210 (1994).
12) Seki, H.: On the Power of Alexander Templates, *Proc. 8th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, pp.150–159 (1989).
13) Beeri, C. and Ramakrishnan, R.: On the Power of Magic, *J. Logic Programming*, Vol.10, pp.255–299 (1991).

(平成9年2月17日受付)
(平成9年7月 1 日採録)

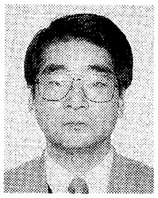
太田　好彦（正会員）

1960年生．1983年千葉大学工学部電子工学科卒業．1985年同大学大学院工学研究科電子工学専攻修士課程修了．同年三菱電機（株）入社．1988年（財）新世代コンピュータ技術開発機構へ出向．1992年職業能力開発大学校情報工学科講師，現在に至る．工学博士（千葉大学）．人工知能や論理プログラミング等の教育研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会各会員．



井上　克已（正会員）

1959年生．1982年京都大学工学部数理工学科卒業．1984年同大学大学院工学研究科数理工学専攻修士課程修了．松下電器産業（株）勤務，（財）新世代コンピュータ技術開発機構への出向，豊橋技術科学大学工学部情報工学系を経て，1997年より神戸大学工学部．現在同助教授．工学博士（京都大学）．人工知能，論理プログラミング，計算機科学に関する教育研究に従事．人工知能学会，AAAI各会員．



長谷川隆三（正会員）

1949年生．1972年九州大学工学部通信工学科卒業．1974年同大学大学院工学研究科通信工学専攻修士課程修了．同年日本電信電話公社（現在NTT）入社．同社武蔵野電気通信研究所勤務．1987年（財）新世代コンピュータ技術開発機構へ出向．1995年九州大学教授，現在に至る．工学博士（九州大学）．データフローマシン，関数型言語，論理プログラミングおよび定理証明に関する研究に従事．電子情報通信学会，人工知能学会各会員．