2M−4

区間評定値を用いた指数型ファジィ AHP *

稲嶺 安洋　宮城 隼夫　山下 勝己[†]
琉球大学工学部情報工学科[‡]

1 まえがき

多目的意思決定のための支援方法として、T.L.Saatyによって開発されたAnalytic Hierarchy Process(AHP)が、最近、システム工学、オペレーションズリサーチをはじめとする多くの分野において注目を集めている。AHPにおいては、各評価基準に対するすべての代替案の一対比較をすることによって代替案の重みを求めるが、評価基準によっては一対比較をすることが難しい場合もある。

本論文では、この問題に対処するため一対比較値に区間評定値を用いた指数型ファジィ数を使用する。また、このときの相対的重要度の導出法についても検討する。

2 一対比較の区間評定と確信度関数

指数型ファジィ AHP では、評価項目 I_i, I_j の一対比較値 a_{ij} として、通常、図1 (a) のような0〜8 までの線形型一対比較値を使用する [2]。しかしながら、一対比較の内容によっては意思決定者が判断しにくいものもあり、このような線形型一対比較値を選定しにくい場合がある。そこで本論文では、図1(b) のような尺度を用いて、意思決定者にある範囲を指定させ、これを一対比較値として使用する [3]。

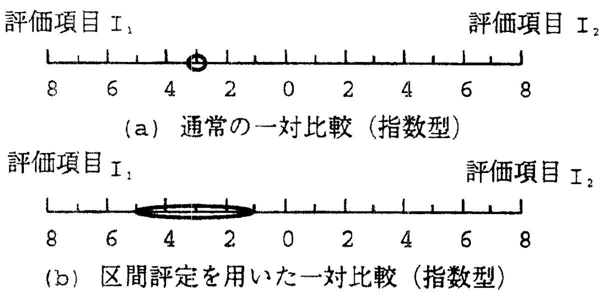


図1 一対比較の評定方法の例

一対比較値をある区間でもって指定した場合、その範囲の一対比較値に対しては、意思決定者がある確信度をもって評定したと解釈できる。そこで、意思決定者の指定した範囲の最大値（上端）と最小値（下端）に挟まれた尺度上の領域を意思決定者の判断に対する評定区間と定義する。この評定区間内には、意思決定者の様々な一対比較値が分布しており、しかも、各々の一対比較値に確信度が分布している。すなわち、確信度は評定区間を定義域とする一対比較値の関数になると考えられ、これを意思決定者の一対比較に対する確信度関数と呼ぶことにする。

この確信度関数は意思決定者個人に依存するものであるが、意思決定者がどのような確信度関数を想定しているのかの調査を数十人に対して行なったところ、ほとんどの意思決定者が確信度関数として図2のような正規分布の近似曲線（三角分布）を想定していた。また、意思決定者が尺度上のある一点をもって評定している場合には確信度が一点に集中しているとみなすことができ、区間評定の特殊な場合と考えられる。

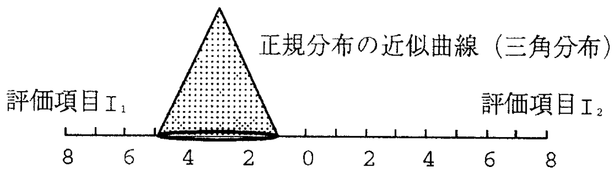


図2 区間評定値の確信度関数

3 区間評定と指数型ファジィ一対比較値

本論文では指数型一対比較値 a_{ij} を

$$a_{ij} = r^{b_{ij}}, (r > 1) \tag{1}$$

とする。r には通常、$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ などを使用する [2]。また、b_{ij} は意思決定者から得られる区間評定の一対比較値であるが、この区間値を中心が m_{ij} で、中心からの距離が d_{ij} の三角型ファジィ数とみなし、そのメンバーシップ関数を次式のように記述する。

$$\mu_{b_{ij}} = \begin{cases} 0 & , x < m_{ij} - d_{ij} \\ (x - m_{ij} + d_{ij})/d & , m_{ij} - d_{ij} < x \le m_{ij} \\ (-x + m_{ij} + d_{ij})/d & , m_{ij} \le x < m_{ij} + d_{ij} \\ 0 & , m_{ij} + d_{ij} \le x \end{cases} \tag{2}$$

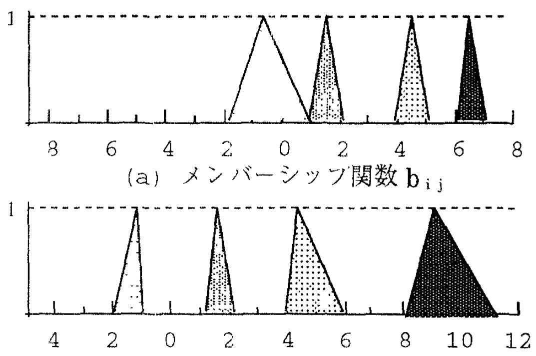
このとき、指数型一対比較値 a_{ij} も当然ファジィ数 $a_{ij}(= r^{b_{ij}})$ となり、そのメンバーシップ関数 $\mu_{a_{ij}}$ は次式のようになる。

---

*Exponential-Type Fuzzy AHP Using Interval Values
†Yasuhiro Inamine, Hayao Miyagi, Katsumi Yamashita
‡Faculty of Engineering, University of the Ryukyu

$$\mu_{a_{ij}} = \begin{cases} 0 & ; y < r^{m_{ij}-d_{ij}} \\ (\log_r y - m_{ij} + d_{ij})/d & \\ & ; r^{m_{ij}-d_{ij}} \le y < r^{m_{ij}} \\ (-\log_r y + m_{ij} + d_{ij})/d & \\ & ; r^{m_{ij}} \le y < rm_{ij} + d_{ij} \\ 0 & ; r^{m_{ij}+d_{ij}} \le y \end{cases} \quad (3)$$

図2の(a)、(b)はそれぞれ式(2)、(3)のメンバーシップ関数の例を図示したものである。おなじ大きさの区間評定値でも重要度が大きくなるにつれて、メンバーシップ関数 a_{ij} の広がりが大きくなっているが、これはあいまいさの度合が大きくなることを意味しており、心理学知見とも一致している[4]。また、0を挟んで一対比較値が両側にまたがっているときは、その両端の一対比較値の絶対値が大きい方と0の区間を一対比較値とする。



(a) メンバーシップ関数 b_{ij}

(b) メンバーシップ関数 a_{ij}

図1 一対比較に使用されるファジィ数

4 相対的重要度の導出

本論文で用いる相対的重要度の導出法は、文献2で提案されたファジィ線形計画問題から相対的重要度を求める方法を、拡張したものである。

一対比較行列 A が完全に整合性がとれている場合を考える。このとき、一対比較行列 a_{ij} と相対的重要度 w_i, w_j の間には次の関係が成り立つ。

$$w_i/w_j = a_{ij}, 1 \le i < j \le n \quad (4)$$

式(1)を考慮し式(4)の両辺から底 r の対数をとる。

$$\log_r w_i - \log_r w_j = b_{ij} \quad (5)$$

ここで、対数部分を次式のように置き換え(4)式を変数 x_i, x_j に関する一次式の形に変形する。

$$\log_r w_i = x_i, \log_r w_j = x_j \quad (6)$$

$$x_i - x_j = b_{ij}, 1 \le i < j \le n \quad (7)$$

式(7)は、行列 $\boldsymbol{A}$ 完全に整合性がとれている場合にのみ成立する。しかしながら、実際の一対比較においては意思決定者の判断に誤りが生じることより、すべての i, j に対し、(7)式が成立するとは限らない。この場合、$x_i - x_j (= \log_r w_i/w_j)$ の値ができるだけ意思決定者の回答値 b_{ij} に等しくなるように変数 x_i, x_j の値を決定するのが妥当と考えられる。

本論文では、式(7)の b_{ij} を式(2)で定義されるファジィ数 b_{ij} だと考えている。従って、x_i, x_j を決定する問題は、$n(n-1)/2$ 個の式(2)のメンバーシップ関数 $\mu_{b_{ij}}; 1 \le i < j \le n$ をファジィ目標とすることにより、Bellman と Zadeh の最大化決定(maximizing decision)を用いて、最小のメンバーシップ関数値を最大にする次式のようなファジィ線形計画問題の形に定式化できる。

$$\mu(x^*) = \max_x \min\{\mu_{b_{ij}}(x) | 1 \le i < j \le n\} \quad (8)$$

式(2)が三角型のメンバーシップ関数であるので、式(8)は、次のような通常の線形計画問題に交換することができる。

$$\begin{aligned} & \max\ \lambda \\ & \text{subject to} \\ & \lambda \le (x_i - x_j + d_{ij} - m_{ij}, \qquad (9) \\ & \qquad \lambda \le -(x_i - x_j) + d_{ij} + m_{ij} \\ & x_i, x_j \ge 0, 0 \le \lambda \le 1, 1 \le i < j \le n \end{aligned}$$

式(9)の制約条件式の総数は2Kで、Kは実際に一対比較を行なった回数で $K = n(n-1)/2$ である。

この問題をシンプレックス法で解くことによって最適解 x^* を求めることができる。また、相対的重要度 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ は式(6)より、

$$w_i = k \cdot r^{x_i^*}, i = 1, \cdots, n \quad (10)$$

となる。ここで、k は相対的重要度の総和を1に正規化するための定数で、$k = 1/\sum_{i=1}^{n} r^{x_i^*}$ である。

5 あとがき

本論文では、AHPの一対比較値に区間評定値を用いた指数型ファジィ数を使用し、意思決定者が判断しにくい一対比較でも、ある範囲を指定することにより一対比較をより簡単に行なえる方法を示した。また、ファジィ線形計画問題を利用した相対的重要度の導出法を区間評定値に対して拡張した。

参考文献

[1] Saaty T.L.:The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill (1980).

[2] 増田・中村・夜久: 指数型ファジィ数を用いたAHPの相対的重要度の導出法, 電子情報通信学会論文誌,vol.J75-A No3,pp646-650 (1992).

[3] 松井・竹谷: 区間評定データの順序構造分析, 電子情報通信学会誌, vol.J77-A No.12,pp1758-1767(1994).

[4] Peter H. Lindsay and Donald A. Norman: 情報心理学入門II, サイエンス社,(1984).