

四元数積分曲線による3D点列の内挿*

1AD-6

三浦 憲二郎, 崎山 直樹
静岡大学工学部機械工学科計測情報講座

1 はじめに

“美しい (fair)”, あるいは“見た目に心地よい (visually pleasing)” 曲面の生成は様々な分野で重要であり, 特に工業デザインやスタイリング分野では製品の良否を決定する主要因となっている. “美しい” 曲面とは何か, どのような性質を持つべきかに関する明確な数学的定義は存在しないが, 美しさを決定する要因として「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることは共通の認識である.

曲線の方向ベクトルを4元数曲線を使って指定することが三浦 [1] によって提案された. 文献 [1] では, この指定法を利用して4元数積分曲線 (quaternion integral: QI curve) を提案している. 本研究では, 4元数積分曲線によって, 3次元空間の点列を内挿する方法を提案する.

2 4元数積分曲線

一般に空間曲線は次式で表せる:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds. \quad (1)$$

ここで, \hat{v}_0 は単位定数ベクトルとする. 本研究ではこの曲線を4元数積分曲線 (quaternion integral: QI curve) と呼ぶ.

曲線の全長を l , パラメータ $t = s/l$, $\hat{v}_0 = \hat{v}_x = (1, 0, 0)$ とし式 (1) を以下のように書き改める:

$$\begin{aligned} C(s) &= P_0 + \int_0^s q\left(\frac{s}{l}\right) \hat{v}_x q^{-1}\left(\frac{s}{l}\right) ds \\ &= P_0 + l \int_0^t q(t) \hat{v}_x q^{-1}(t) dt, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

この式の $q(t)$ を, 次数 n の Bézier 曲線を利用して以下のように定義する:

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp(\hat{v}(t)\beta(t)) \\ &= \cos(\beta(t)) + \hat{v}(t) \sin(\beta(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

*Interpolation of 3D Points by Quaternion Integral Curves, Kenjiro T. Miura, Naoki Sakiyama, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu 432, Japan

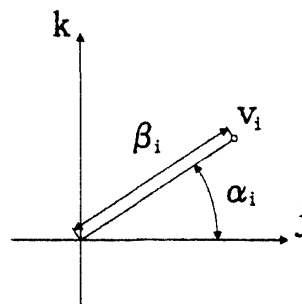


図 1: 制御 4 元数

ここで,

$$\hat{v}(t) = (0, 0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))), \quad (4)$$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_{n,i}(t), \quad (5)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{n,i}(t). \quad (6)$$

Bernstein 基底関数 $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ である. 図 1 に示したように, α_i と β_i を曲座標値として次式で与えられる 4 元数 $v_i \in R^3$, $i = 0, \dots, n$ は,

$$v_i = (0, 0, \beta_i \cos(\alpha_i), \beta_i \sin(\alpha_i)) \quad (7)$$

と制限され, その結果 $v_i \in R^2$ となる.

3 2次 QI 曲線による点列の内挿

この節では, QI 曲線を用いて与えられた 3 次元の点列を内挿する方法について述べる. 内挿に用いる QI 曲線は, 式 (2) で表される Bézier QI 曲線の $n = 2$ の場合, すなわち 2 次 Bézier QI 曲線とする. 2 つの連続する点の間を 1 本の Bézier QI 曲線で内挿し, それらの曲線は G^2 連続性 (曲率まで連続) を保ちながら接続させる. 与えられた $n+1$ 個の点列を P_i , $i = 0, \dots, n$, とし, n 本の 2 次 Bézier QI 曲線を $C_i(s)$, $i = 0, \dots, n-1$, とする.

$C_i(s)$ は P_i を始点とするので、 $0 \leq s \leq l_i$ の s について

$$C_i(s) = P_i + \int_0^s q_i\left(\frac{s}{l_i}\right) \hat{v}_x q_i^{-1}\left(\frac{s}{l_i}\right) ds, \quad (8)$$

$$= P_i + l_i \int_0^{t_i} q_i(t) \hat{v}_x q_i^{-1}(t) dt, \quad (9)$$

と表すことができる。ここで、 l_i は曲線 $C_i(s)$ の全長であり、 $t = s/l_i$ である。また、 $q_i(t)$ は、

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \exp(\hat{v}_i(t) \beta_i(t)) \\ &= \cos(\beta_i(t)) + \hat{v}_i(t) \sin(\beta_i(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、

$$\hat{v}_i(t) = (0, 0, \cos(\alpha_i(t)), \sin(\alpha_i(t))), \quad (11)$$

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j} B_{2,j}(t), \quad (12)$$

$$\beta_i(t) = \sum_{j=0}^2 \beta_{i,j} B_{2,j}(t). \quad (13)$$

さらに、以下の説明の便宜を図るために、

$$\hat{v}_{i,j} = (0, 0, \cos(\alpha_{i,j}), \sin(\alpha_{i,j})), \quad (14)$$

$$q_{i,j} = \exp(\hat{v}_{i,j} \beta_{i,j}) \quad (15)$$

とする。1本の曲線を定めるには、 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, j = 0, 1, 2$, 及び l_i が必要なので、変数の数は全体として $(2 \times 3 + 1) \times n = 7n$ 個である。

$C_i(s)$ の1次微分、2次微分は次式で与えられる:

$$\frac{dC_i(s)}{ds} = q_i(t) \hat{v}_x q_i^{-1}(t), \quad (16)$$

$$\frac{d^2 C_i(s)}{ds^2} = \frac{2}{l_i} q_i(t) [\omega_i(t), \hat{v}_x] q_i^{-1}(t). \quad (17)$$

曲線の接続部での G^0 と G^1, G^2 の各連続性は、

$$C(l_i) = P_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (18)$$

$$q_{i+1,0} = q_{i,2}, \quad (19)$$

すなわち、

$$\alpha_{i+1,0} = \alpha_{i,2}, \quad \beta_{i+1,0} = \beta_{i,2}, \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (20)$$

また、

$$\frac{1}{l_{i+1}} q_{i+1,0} [\omega_{i+1}(0), \hat{v}_x] q_{i+1,0}^{-1} = \frac{1}{l_i} q_{i,2} [\omega_i(1), \hat{v}_x] q_{i,2}^{-1}, \quad (21)$$

すなわち、 $i = 0, \dots, n-2$ について

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_{i+1}} (\alpha_{i+1,1} - \alpha_{i+1,0}) &= \frac{1}{l_i} (\alpha_{i,2} - \alpha_{i,1}), \\ \frac{1}{l_{i+1}} (\beta_{i+1,1} - \beta_{i+1,0}) &= \frac{1}{l_i} (\beta_{i,2} - \beta_{i,1}). \end{aligned} \quad (22)$$

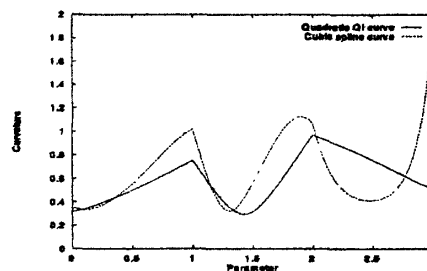


図 2: 内挿曲線の曲率グラフ

条件式の個数は、 G^0 に関するものが x, y, z の各座標を考慮して $3n$ 個、 G^1 に関するものが $2(n-1)$ 個、 G^2 に関するものが同じく $2(n-1)$ 個である。したがって、全体としては $7n - 4$ 個となる。変数の個数 $7n$ と比較すると4だけ少ないので、曲線全体の両端点での接線方向を与える、すなわち、 $\alpha_{0,0}$ と $\beta_{0,0}, \alpha_{n-1,2}, \beta_{n-1,2}$ を指定する。変数と式の個数が一致するので、Newton-Raphson 法といった数値解析手法によって変数を求めることができる。

4 内挿例

図2に3本の2次 Bézier QI 曲線による内挿例の曲率のグラフを実線で。比較のために3次スプライン曲線の曲率のグラフを点線で示す。始点・終点では接線を指定し、最初の3点を通る円弧、及び最後の3点を通る円弧に一致するように接線方向を定め、大きさは1と指定している。図2の曲率グラフを見ると、スプライン曲線に比べて QI 曲線の曲率の変化がより滑らかであることがわかる。また、スプライン曲線では終点での接線方向を一致させるために曲率が非常に大きな値になっている。

5 おわりに

本研究では、4元数を用いて定義される4元数積分曲線を用いて点列を内挿する方法を提案した。特に、2次 Bézier QI 曲線によって点列を内挿する方法を提案し、その実装法、内挿例を示した。

参考文献

- [1] 三浦 憲二郎, “4元数積分曲線,” グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム'97, pp.101-109