過小代数制約問題における矛盾の簡易検出法

4H－4

沢田浩之
機械技術研究所

1　はじめに

過小制約問題とは，変数の数に比べて制約条件の数が足りないために解が一意に決定しない問題のことを指す．本稿では，過小代数制約問題において，制約の相互関係を表現するグラフを構成することによって，与えられた代数制約集合に存在する矛盾を検出する方法を提案する．

2　基本的な考え方

与えられた代数制約を式 (1) とする．

$$\begin{aligned} &f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, f_l(\boldsymbol{x}) = 0, \\ &g_1(\boldsymbol{x}) \neq 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) \neq 0, \\ &h_1(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ldots, h_n(\boldsymbol{x}) \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

式 (1) は，スラック変数 s_j および t_k を導入することにより，次式 (2)∩(3) に置き換えられる．

$$\begin{aligned} &f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, f_l(\boldsymbol{x}) = 0, \\ &g_1(\boldsymbol{x}) \cdot s_1 = 1, \ldots, g_m(\boldsymbol{x}) \cdot s_m = 1, \\ &h_1(\boldsymbol{x}) = t_1, \ldots, h_n(\boldsymbol{x}) = t_n. \end{aligned} \tag{2}$$

$$t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0. \tag{3}$$

ここで提案する方法は，式 (2) から t_k のみで構成される等式を導き，式 (3) との矛盾を検査するものである．

3　本手法の幾何学的な意味

スラック変数 $\boldsymbol{s}$ および $\boldsymbol{t}$ の導入により，式 (1) で表される $\boldsymbol{x}$ 空間における曲面は，式 (2)∩(3) で表される $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ 空間における曲面に変換される．ここで，式 (2)∩(3) に矛盾が存在することとは，式 (2) で表現される曲面が式 (3) で表現される領域を通過しないことを意味する．したがって，式 (2) で表現される $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ 空間の曲面を $\boldsymbol{t}$ 空間へ射影することにより，式 (2)∩(3) の矛盾を検査することができる．

以上が本手法の幾何学的意味である．

4　簡易検出法

式 (2) の $\boldsymbol{t}$ 空間への射影は，式 (2) により生成されるイデアル I [2] に含まれる要素のうち，$\boldsymbol{t}$ のみからなる要素の集合として与えられる．したがって，I の部分イデアル $P = \{p(\boldsymbol{t}) | p(\boldsymbol{t}) \in I\}$ の基底 Q を求めれば，Q によって表現される曲面が式 (2) の $\boldsymbol{t}$ 空間への射影となる．しかしながら，Q が式 (3) で表現される領域を通過するか否かを判定することは一般に困難である．

本稿で提案する方法は，式 (2) の各式をノードとする木を作成し，個々の式を簡約規則と見なすことによって相互に簡約化 [1] を行い，最終的に $\boldsymbol{t}$ のみからなる等式 $p_i(\boldsymbol{t}) = 0$ を導くものである（図 1）．導かれた等式を式 (3) を用いて評価することにより，矛盾の検出や新たな等式制約の導出が行われる．

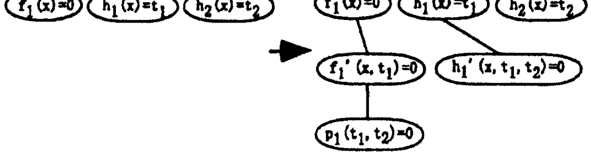

図 1: 簡約木

Easy detection of inconsistency in algebraic under-constrained problems
Hiroyuki Sawada
Mechanical Engineering Laboratory
Namiki 1-2, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

4.1 項順序

簡約化を行うためには，項順序 [1] を設定し，どの変数によってどの変数が簡約化されるのかを指定しておかなくてはならない．この設定に当たり，図 2 に示す制約グラフ [3] を用いる．これは，変数および制約をノードとした 2 部グラフで，制約相互の依存関係を表す．本手法は不等式制約による矛盾検出法であるので，不等式制約に対応する変数 t_k によって他の変数を簡約化する必要がある．したがって，変数 t_k の順位を最下位に，また，不等式制約と直接結びついている変数の順位を t_k に次いで低く設定する．

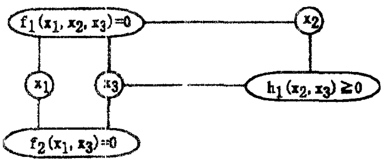

図 2: 制約グラフ

4.2 正規化

与えられた制約同士は，制約グラフを介して互いに影響し合う．すなわち，不等式制約に対応する変数 t_k による簡約化は，制約グラフのエッジにそって進められる．簡約化が滞りなく進められるために，間に介在する等式制約を正規化しておく必要がある．簡約化に先立ち，前節で設定した項順序を用いて等式制約のグレブナ基底 [1] を計算し，等式制約の正規化を行う．

5 例題

例題として，電源，モーター，歯車からなる機械システムを取り上げる (図 3)．各機械要素に関する制約は以下のとおりとする．

電源 $0 \leq v_b \leq v_0$, $0 \leq i \leq i_0$.

モーター $\tau = ki$, $v = ir + k\omega$, $k \geq 0$, $r \geq 0$.

歯車 $\tau_i = \rho\tau_o$, $\rho\omega_i = \omega_o$.

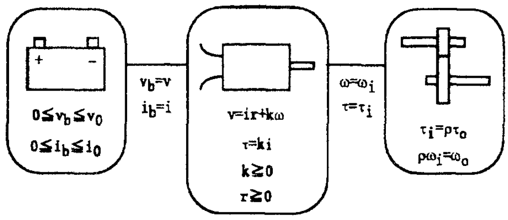

図 3: 機械システムの構成

また，これらの機械要素を接続するための制約は以下のように与えられる．

電源とモーターの接続 $v_b = v$, $i_b = i$.

モーターと歯車の接続 $\tau = \tau_i$, $\omega = \omega_i$.

さらに制約条件 (4) が課されているものとする．

$$\tau_o\omega_o > v_0 i_0 \tag{4}$$

この例題の場合，簡約木を構成することにより式 (5) が導かれ，矛盾が存在することがわかる．

$$\tau_o\omega_o = v_0 i_0 \tag{5}$$

6 おわりに

スラック変数を導入することにより不等式制約を等式制約として表現し，それらの等式制約によって構成される簡約木を用いて制約集合に存在する矛盾を検出する方法を提案した．現在のところ，矛盾検出とは関係のないノードが多数生成されてしまうという問題があり，これが計算効率向上のための課題となっている．

参考文献

[1] Buchberger, B.：Gröbner Basis: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, Technical Report, RISC-LINZ(1983).

[2] 上野健爾：代数幾何入門，p.137，岩波書店，東京 (1995).

[3] 永井保夫，生駒憲治：制約グラフのスパース構造に基づいた整合性解析と制約処理の効率化についての検討，ICOT 研究速報，TM-0928(1990).