複素力学系による動画像生成

4Q－5

青山智夫，長谷川年洋，池田且將
宮崎大学 工学部 電気電子工学科

1. はじめに

一般に複素力学系 $Z_{n+1}=f(Z_n, Z_{n-1},, Z_{n-2}, \cdots\cdots)$は初期値を適当に選び，生成された数列$\{Z_i\}$を適当なスケールで複素平面上にプロットすると図形が描かれることが知られている．

特に力学系 $Z_{n+1}=Z_n^2-Z_{n-1}+A$とその変形系：

$$\begin{cases} Zr_{n+1}=\{Zr_nZr_n-Zi_nZi_n\}-Zr_{n-1}+A_r \\ Zi_{n+1}=\{\alpha Zr_nZi_n\}-Zi_{n-1}+A_i \end{cases}$$

からは閉曲線を始めとして，数多くの図形が生成される．ここで記号r, iは実数/虚数成分を表わす．αは実数で2～6程度に取る．$\{\cdots\cdots\}$内がZ^2に対応する部分で，この項によって実虚成分間の混合を行う．数列$\{Z_i\}$のプロット図は線画に特徴があり，他の方法では描くことが困難な閉曲線を描くことができる．曲線の形はパラメータや初期値に敏感に依存する場合と，あまり依存しない場合がある．それらについて報告する．

2. 複素力学系で線画が描ける理由

任意の添字iについて $Z_{i+1}=f(Z_i)$と書く．ゆえに，

$$Z_{i+m}=f(f(.....(Z_i)).....)=F(Z_i)$$

以下の条件を満たすとき，

$$F(Z_i)-Z_i=\delta\sim 0$$

δ微小数．$\{Z_i\}$をプロットすると2点$\{Z_{i+m}, Z_i\}$は近傍に存在する．

$$Z_{i+m}=Z_i+\delta$$

$$Z_{i+2m}=Z_{i+m}+\varepsilon=Z_i+\delta+\varepsilon$$

である．従って，n+1個の点列$\{Z_i, Z_{i+m}, ..., Z_{i+nm}\}$は$Z_i$点を起点にして$\{\delta, \delta+\varepsilon, \delta+\varepsilon+\zeta, ...\}$の位置にある．$\delta, \varepsilon, \zeta, ...$が微小な複素数ならば，その位置は複素平面上にLogoのタートルが線を描くようになる．

$1\leq j\leq m-1$の範囲の添字について，

$$F(Z_{i+j})-Z_{i+j}=\delta'\sim 0$$

ならば$m-1$個のタートルで線を描くことになり，曲線は同時にm本が描かれる．そしてδとδ'はごく僅か違うので，それらの曲線は良く似ているが微妙に違う（特に起点から離れるにつれ）ことになる．これが描かれた図に対称性があるように見える原因である．

Closed-Curves generated by Complex-Dynamical-System

Tomoo Aoyama, Toshihiro Hasegawa, Katsumasa Ikeda
The Faculty of Engineering, Miyazaki University
1-1 Gakuen Kibanabai-Nishi, Miyazaki 889-21, Japan.

では，実際にそのような力学系が存在するか否かを調べる．

3. 2次複素力学系：$Z_{i+1}=Z_i^2-Z_{i-1}+A$の特徴

A→0では次の関係が成立する．

① $\alpha^3=\beta^3=\alpha^2\beta=\alpha\beta^2=0$ なる近似では $Z_0=\alpha, Z_1=\beta$ とすると，

$\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\}=\{Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}=\cdots\cdots$

である．これは数$\{Z_i\}$のプロット図が4点になることを示す．

② $\alpha^4=\beta^4=\alpha^3\beta=\alpha\beta^3=\alpha^2\beta^2=0$ なる近似では $Z_0=\alpha, Z_1=\beta$ とすると，

$\{Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}=\{Z_0+\gamma,\ Z_1+\delta,\ Z_2-\gamma,\ Z_3-\delta\}$,

$\{Z_8, Z_9, Z_{10}, Z_{11}\}=\{Z_0+2\gamma, Z_1+2\delta, Z_2-2\gamma, Z_3-2\delta\}$,

$\{Z_{4m}, Z_{4m+1}, Z_{4m+2}, Z_{4m+3}\}=\{Z_0+m\gamma, Z_1+m\delta, Z_2-m\gamma, Z_3-m\delta\}$,

なる関係が導かれる．ここで$\gamma=-2\alpha^2\beta\sim O(3)$, $\delta=2\alpha\beta^2\sim O(3)$である．これは数$\{Z_i\}$のプロットが4本の直線になることを示す．

③ $\alpha^5=\cdots\cdots=0$以上の近似では①，②のようなZ要素間の関係はO(4)項によって近似的にしか成立しない．これは数{Zi}のプロットが4本の直線に良く似たそれぞれに形の異なる曲線になることを示す．以上①→②→③と原点からより離れた領域の力学系の振る舞いを示した．

$A\neq0$では複雑すぎて上記のような関係を見いだし得ないが，そのような場合，コンピュータによる数列$\{Z_i\}$の可視化が有効である．特に数列のパラメータ変化を時間軸に取り，動画化することによって複素力学系の性質を推測できる．そのような手段で経験的に以下のことが解った．

④点Aが〜0.1前後の実軸上にあり，$Z_0=\mathrm{conj}(Z_1)$の場合，$\{Z_i\}$は閉曲線を描くことが多い．実際$Z_0=(0.1, 0.1)=\mathrm{conj}(Z_1)$，$\alpha=2$, A=(0.074, 0)は楕円様の曲線になるが，$\{Z_i\}$のプロットを追跡するとZ_2の近傍点（距離で$<10^{-3}$の点，コンピュータのCRT画面上で2点とは判別できない点）は$Z_{2+\xi}, Z_{2+2\xi}\cdots\cdots$となり$\xi$回目に$\{Z_i\}$のプロットが元の点の近傍に戻ってくる様子がある（もちろん$\xi\to\infty$で回帰距離は次第に大きくなる）．この傾向はZ_2以外の点のほとんどに見られる．これは上記の $F(Z_i)-Z_i=\delta\sim0$という関係を満足する場合があることを示す．

複素力学系の$\{Z_i\}$プロットで描かれる曲線は初期値Z_0, Z_1，パラメータα, Aの選択に依存する．Z_0, Z_1, α, Aの各値を4次元空間内の点になぞらえると，曲線の形が変化する位置は複数存在する（動画化によって4次元空間をスキャンし，その位置を見いだすことができる）．その位置の近傍では曲線を描いている$\{Z_{2+\xi}, Z_{2+2\xi}\cdots\cdots\}$という関係が変化しやすく，$\xi$の値がパラメータの僅かな違いに大きく変動して，突如曲線の形が変るのである．そのとき他の方法では描くことが困難な図形を（多くの場合に）見いだし得る．曲線から平面図形に変ることもある．