5K－2

4次元空間データベースシステムHawksにおける4次元空間表現

黒木　進，王　霊哲，牧之内　顕文
九州大学大学院システム情報科学研究科

1. はじめに

時間変化する3次元空間データを4次元空間データと呼ぶ．そして，4次元空間データを格納する空間データベースを4次元空間データベースと呼び，われわれはその研究・開発を行っている[1]．われわれが開発している4次元空間データベースシステムはHawksというが，そのシステムでの4次元空間データ(図形)の表現について報告する．

2. 単体と複体

4次元の図形を表すための基本的な部品として，この研究では単体という図形を用いる．そして，ある条件を満たす単体の集合を複体という．単体と複体を用いて時間変化する3次元空間データを記述する．以下で，図形の表現に必要な位相幾何学的な概念を与えるが，それらは文献[2]による．

定義1. 単体(simplex)

N次元空間の中に一般的な位置にあるn+1個の点 $a(0), a(1), \ldots, a(n)$ をとる．このとき，
$w(0)+w(1)+ \ldots +w(n) = 1, w(i) \geq 0 (i = 0, 1, \ldots, n)$
のようなn+1個の実数 $w(0), w(1), \ldots, w(n)$ によって，$w(0)a(0) + w(1)a(1) + \ldots + w(n)a(n)$ と表される点全体の集合を $|a(0)a(1)\ldots a(n)|$ と書き，$a(0), a(1), \ldots, a(n)$ を頂点とするn次元単体，または簡単にn単体という．

n =0, 1, 2, 3のとき，n単体はそれぞれ点，線分，三角形，三角錐となる．

定義2. 辺単体(face)

n単体 $|a(0)a(1)\ldots a(n)|$ のn+1個の頂点からq+1個(但し，$0 \leq q \leq n$)の点 $b(0), b(1), \ldots, b(q)$ を選ぶと，これらを頂点とするq単体が決まる．このようにして得られた単体をq辺単体という．

定義3. 複体(simplicial complex)

N次元空間の中の有限個の単体からなる集合Kがあって，次の条件(1)，(2)を満たしているとき，Kを複体という．

(1) s(0)をKに属する単体とするとき，s(0)の辺単体はまたKに属する．

(2) s(0)とs(1)をKに属する二つの単体とし，s(0)とs(1)の積集合intersection(s(0), s(1))が空集合でないとき，intersection(s(0), s(1))はs(0)の辺単体であり同時にs(1)の辺単体でもある．

上で与えられた複体の概念を用いることによって，任意の有限次元の多面体を表現できる．例えば2次元の多面体は，有限個の三角形からなる複体によって表現されるし，3次元の多面体は，有限個の三角錐からなる複体によって表現される．同様に4次元の多面体は，有限個の4単体からなる複体によって表現される．このことから，われわれは単体と複体という概念を用いて4次元の図形を表現することにした．

3. 時間変化する単体の表現

上で定義した単体が時間的に位置や形状を変えるときに，これをわれわれのデータベースではどのように表現するかを述べる．

われわれの空間表現においては，3次元空間を記述する点(x(t), y(t), z(t))を4次元空間の点(x(t), y(t), z(t), t)に変換する．そのように定義された4次元空間において，3次元空間図形の運動や変形を記述する．すなわち，各時刻tにおける3次元図形(4次元空間の部分集合)の和集合によって4次元図形を定義し，その図形をデータベースに格納する．

ここでは例題として，時間間隔[0, 1]にわたって静止している3単体(ここでは，3単体の4つの頂点を(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)とする)を4次元空間でどのように表現するかを考える(図1).

このとき，この3単体を4次元空間に埋め込む．

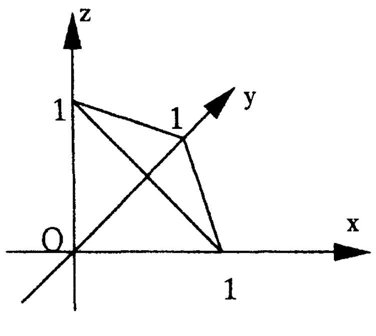

図1. 考察の対象とする3単体

Four Dimensional Spatial Data Representation in the Four Dimensional Spatial Database System Hawks
Susumu Kuroki, Wang Ling Zhe, and Akifumi Makinouchi
Kyushu University
6-10-1 Hakozaki, Higashi, Fukuoka 812-81, Japan

このとき，t = 0 での各頂点の位置と t = 1 での各頂点の4次元空間での位置をそれぞれ，p(0)(0, 0, 0, 0), p(1)(1, 0, 0, 0), p(2)(0, 1, 0, 0), p(3)(0, 0, 1, 0), q(0)(0, 0, 0, 1), q(1)(1, 0, 0, 1), q(2)(0, 1, 0, 1), q(3)(0, 0, 1, 1) とする．

時間変化する3次元空間オブジェクトを4次元の多面体で表現するのがこの研究でのアプローチである．そのため，まず静止する三角錐に対応する4次元図形の境界を求めよう．

3単体|p(0)p(1)p(2)p(3)|は時刻 t = 0 での三角錐の位置と形状を表すとともに，3単体|q(0)q(1)q(2)q(3)|は時刻 t = 0 での三角錐の位置と形状を表す．これら2つの単体は4次元図形の『底面』(超平面 t = 0 に含まれる)と『上面』(超平面 t = 1 に含まれる)に対応する．側面に対応するのが，4つの3次元凸多面体conv(p(0), p(1), p(2), q(0), q(1), q(2)), conv(p(1), p(2), p(3), q(1), q(2), q(3)), conv(p(0), p(2), p(3), q(0), q(2), q(3)), conv(p(0), p(1), p(3), q(0), q(1), q(3))である．但し，conv(a(1), ..., a(n))は点の集合{a(1), ..., a(n)}に対する凸包を表す．これら4つの3次元凸多面体はもともとの三角錐の2辺単体が時間変化することによって4次元空間に誘導される図形である．

上のような境界を持つ4次元多面体を複体として表現するためには，この図形を単体の集合に変換する必要がある．そのためには境界を3単体からなる複体に変換する必要がある．今の場合，『上面』と『底面』はすでに単体であるから，側面を単体に分割する．

側面conv(p(0), p(1), p(2), q(0), q(1), q(2))の構造は以下のようになる(図2)ので，|p(0)q(0)q(1)q(2)|，|p(0)p(1)p(2)q(2)|及び|p(0)p(1)q(1)q(2)|の3つの3単体に分割される．同様に他の側面も3つの3単体に分割されるので，この4次元図形は14個の3単体を境界として持つ．

このようにして4次元図形の境界を3単体の集合に分割し，4次元図形の内部にある点，例えば重心をとって(その点をrとする)，分割の結果できるすべての3単体に点rを加えて4単体化することによって，4次元図形を単体の集合にできる(例えば3単体|p(0)p(1)p(2)p(3)|を|p(0)p(1)p(2)p(3)r|にする)．これら4単体と超平面 $t = t_0$ による断面は図3のようになる．但し，これが可能になるのはこの例題で取り上げた4次元図形が凸であるからである．

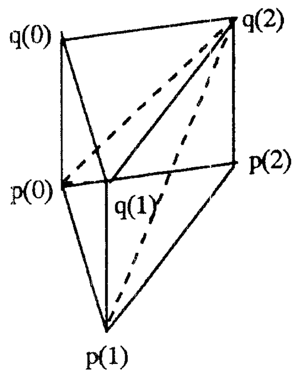

図2. conv(p(0), p(1), p(2), q(0), q(1), q(2))の構造

この例題で述べた手法は，図形が等速直線運動をしている場合にもそのまま適用できる．それは，単体が等速直線運動するときにできる4次元図形は，上で述べた例題にでてくる4次元図形と位相的な構造が等しいからである．

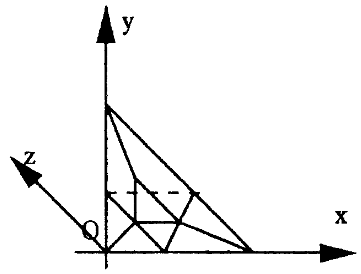

図3. 4次元図形と超平面 $t = t_0$ の交わりの一部 ($z = t_0/2$ より下側の部分)

4. 複体の動き

3.で述べた，単体が時間変化する時にできる4次元図形の表現法を用いる．すなわち，複体のメンバとなっている各単体の動きによってひき起こされる4次元図形(単体に分割済み)の和集合をとることによって複体の動きを表現する．

このとき，複体のメンバである2つの3単体が和集合として例えば2単体を持つときは，すでに一方の単体の動きを表現するときにできた分割と矛盾を起こさないようにする必要がある．

5. 終わりに

時間変化する3次元図形の表現法について説明した．ここで述べた分割法には改良の余地があるためこれに取り組んでゆきたい．

謝辞
この研究は平成8年度文部省科学研究費・基盤研究(A)(2)の補助を受けている．

参考文献

[1] 黒木進，王霊哲，牧之内顕文: 4次元空間データベースシステムHawksにおける空間データ型の設計，電子情報通信学会データ工学研究会技術報告，1997年1月．
[2] 田村一郎: トポロジー，岩波全書，岩波書店，1972年