時間窓による共振帯域幅の変化について

6J－1

福島学　久保勝稔　城戸健一（千葉工業大学）

1　はじめに

一般にFFTを用いて周波数分析を行う際に、観測波形の不連続性による不要なスペクトルの発生を防ぐために、観測波形に時間窓をかける。しかし、時間窓を用いるということは、本来の波形を歪めてしまうことにほかならない。

本報告では、時間窓により、共振帯域幅が変化することを理論的に明らかにし、そのことを計算機シミュレーションで検証した結果を報告する。

2　時間窓による周波数スペクトルの変化

DFTは、信号系列から切り取った波形（観測波形）を周期的に並べたもののフーリエ係数である。このため、観測波形によっては不連続性による不要なスペクトルが発生する。このため、一般には観測波形の始点・終点に重みづけ（時間窓をかける）する。ここで、観測波形 $x(t)$ に時間窓 $w(t)$ をかけた時間波形 $x_w(t)$ のスペクトル $Xw(f)$ を考える。

$$Xw(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)\exp(-j2\pi ft)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\exp(j2\pi f_1 t)df_1\right]w(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

積分の順序を変更すると次式となり、これは、周波数軸上での畳み込みである。

$$Xw(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\exp(-j2\pi(f-f_1)t)dtdf_1=\int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)W(f-f_1)df_1=X(f)*W(f)$$

すなわち、時間窓をかけることにより、完全な周期を観測しても、そのスペクトルは、元波形のスペクトルと時間窓のスペクトルの周波数軸上の畳み込みとなる[1]。

このため、例えばDFTを用いた系の伝達関数推定手法であるクロススペクトル法では、時間窓による変形が生じる。これまでに著者等によって、時間窓の時間軸上の変化と窓長が有限であることにより、推定されるインパルスレスポンスが、真値に比べ、短く推定されることを報告してきた[2]。これは、共振帯域幅が広がることを意味する。本報告では、これについて述べる。

3　クロススペクトル法

系の伝達特性を推定する手法の一つとしてクロススペクトル法があり、現在でもFFTアナライザ等に組み込まれ使われている。この方法は次式の通り、入力信号 $x(n)$ と出力信号 $y(n)$ のクロススペクトルと入力信号のパワースペクトルの比により、伝達関数H(k)を推定する。

$$H(k)=[X(k)^{*}\,Y(k)]\,/\,[X(k)^{*}\,X(k)]$$

しかし、DFTのために時間窓を使用するため、実際には次式を計算することになる。

$$H(k)=[[X(k)*W(k)]^{*}[Y(k)*W(k)]]/[[X(k)*W(k)]^{*}[X(k)*W(k)]]$$

このため、推定インパルスレスポンスは次式となる[2]。

$$IDFT[\hat{H}(k)]\hat{h}(n)=\left\{\frac{C_0^2+\sum_{p=1}^{P}2C_p^2\cos\left(\frac{2\pi.\,pn}{N}\right)}{\sum_{p=-P}^{P}C_p^2}\right\}\left\{\frac{\sum_{p=0}^{N-n}w(p)}{\sum_{p=0}^{N-1}w(p)}\right\}h(n)$$

但し $C_p^2=a_p^2+b_p^2$　　$h(n)$：真のインパルスレスポンス

a_p^2：時間窓のスペクトル（実部）　b_p^2：時間窓のスペクトル（虚部）

時間窓により推定インパルスレスポンスが受ける振幅変形を図１に示す。この変形により、推定値は、図２に示すとおり真のインパルスレスポンスより早く減衰するように観測される。

A Study on The Effect of Time Window in Q Estimation

Manabu Fukushima, Katsutoshi Kubo, Ken'iti Kido(Chiba Institute of Technology)

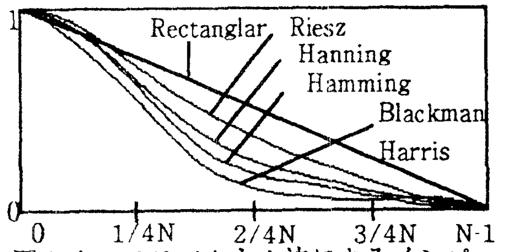

図1 クロススペクトル法によるインパルスレスポンス推定の際に用いる時間窓の時間軸上の重み変化および有限長であることにより推定インパルスレスポンスが受ける時間軸上の振幅変形

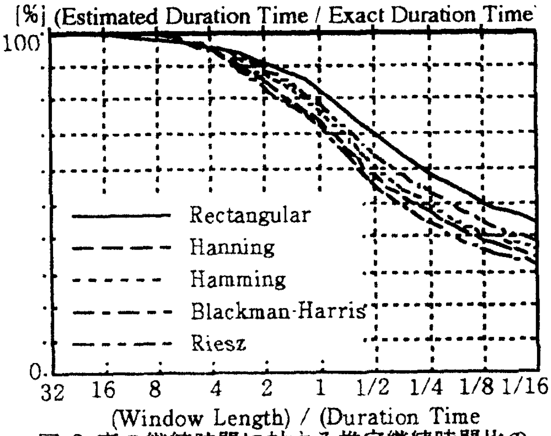

図.2 真の継続時間に対する推定継続時間比の時間窓長による変化

時間窓により継続時間が短く推定されるということは、周波数軸では共振帯域幅が広く観測されることを意味する。単峰系の伝達関数をクロススペクトル法で推定した場合の、共振帯域幅（Q）の変化を図3に示す。また、推定伝達関数より得られたQを表1に示す。図3には、時間窓長/継続時間＝4、1/4の結果を、表1には、比が1の場合もあわせて示す。

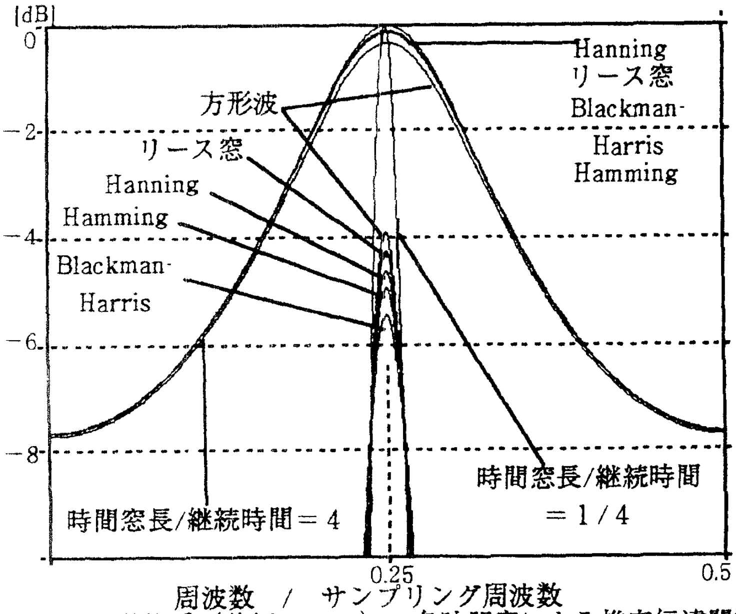

図3 単峰系（共振:16/64）の各時間窓による推定伝達関数
時間窓長/継続時間＝1/4, 4

表1 単峰系を各時間窓により推定し得られた共振帯域幅（Q）

窓長/継続時間	4	1	1/4
真値	0.9	4.0	11.6
方形波	0.8	3.5	8.0
リース窓	0.8	3.4	6.1
Hanning	0.9	3.3	6.4
Hamming	0.8	3.2	5.6
Blackman-Harris	0.8	3.1	6.7

4 おわりに

本報告では、時間窓により、共振帯域幅が変化することについて報告した。クロススペクトル法のように、DFTを応用する場合、時間窓によってその結果が変形を受ける。十分長い時間窓を用いる場合はその影響が少ないが、そうでない場合にはその影響が無視できない。

[参考文献]

[1]城戸健一著、" ディジタル信号処理入門"、丸善株式会社、p121-p134、1985

[2]M.Fukushima, T.Suizu, K.Kido(Chiba Institute of Technology), "A Study on the Effect of Time Window and Source Signal on the Estimation of Impulse Response by Cross Spectral Technique", The Third International Conference on Motion and Vibration Control, 1996.9