

## 電磁界解析のための有限要素・境界要素併用法の並列処理

5 F-7

小幡 元樹, 前川 仁孝, 坂本 哲也, 若尾 真治, 小貫 天, 笠原 博徳

早稲田大学理工学部電子電気情報工学科

## 1 はじめに

本稿では、電磁界解析のための有限要素・境界要素併用法のデータ転送の最適化、及び生成される係数行列の格納法について述べる。電磁界解析では、磁性体領域などの非線形問題を扱い、また周辺磁場解析では無限に近い領域を扱う必要がある。そこで電磁界解析において効率良い計算をするために、磁性体領域などの非線形領域には有限要素法を、空気領域には境界要素法を利用する有限要素・境界要素併用法を提案した [1, 2]。従来より、有限要素法 [3] に関しては領域分割を用いた並列化の研究が多く行われてきた。しかし有限要素・境界要素併用法では、境界要素法を併用したことによる係数行列が特殊な形になるため、従来の並列化手法では効率よい並列処理が困難であった。そこで、筆者らはサブストラクチャ法 [4] による分割を境界要素部分にも適用して並列処理する手法を提案した [5]。本稿では、さらに効率よい並列処理を図るために、データ転送などを最適化し高速化する手法の提案を行う。また、提案する手法の有効性を評価するために Cenju-3 上で実装し、評価した結果について述べる。

## 2 電磁界解析アプリケーションにおけるデータ転送法と係数行列の格納法

ここでは、今回提案したデータ転送方法と作成される要素の格納法について述べる。

## 2.1 データ転送の最適化手法

本節では、電磁界解析アプリケーションでのデータ転送の最適化手法について述べる。

電磁界解析アプリケーションでは、効率良く並列処理を行うために、係数行列生成部分、LU 分解部分においてプロセッサ間のデータ転送が発生するが、従来のデータ転送手法では、送信、受信を行わないプロセッサは、転送を保証するためのバリア同期のため、他の動作を行えなかった。性能評価に用いた Cenju-3 は、各プロセッサで送信ユニット、受信ユニットを別々に持っており、これを利用して全プロセッサで同時に送受信を行うようにする。すなわち、各プロセッサで送信データを通信用バッファに格納し、図 1 に示すように、各プロセッサが同時に送信を行なうことにより、通信によるオーバーヘッドを軽減でき、並列処理による速度向上につながる。実装に用いた Cenju-3 は並列化ライブラリとして mini-MPI と Paralib/CJ の 2 種類を持っているが、提案する手法では、各プロセッサが送信を同時に行なうため受信命令を用いることができない。よって、データ転送を行う際に受信を明示しなくてもよい Paralib/CJ の方を用いる。

Parallelization of the Hybrid Finite Element and Boundary Element Method for the Electro-Magnetic field analysis  
Motoki OBATA, Yosataka MAEKAWA, Tetuya SAKAMOTO, Sinji WAKAO, Takashi ONUKI, Hironori KASAHARA  
Dept. of Electrical, Electronics and Computer Engineering,  
School of Science, Waseda University

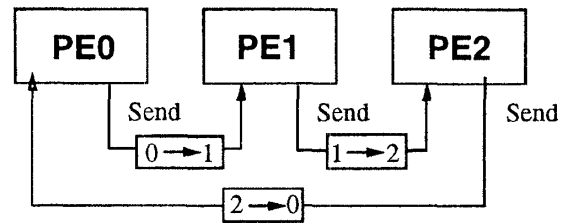


図 1: 最適化したデータ転送

## 2.2 要素の格納法

有限要素法を用いたアプリケーション全般の問題点として、行列を格納するために多くのメモリ領域が必要となる点が挙げられる。係数行列を効率良く格納し求解する手法として、スカイライン法などが従来より研究されている [6] が、筆者らは、サブストラクチャ法による領域分割をしたことにより縁つき対角ブロック行列を格納するために、ブロックの部分のみをメモリ上に連続して (1 次元配列) 格納し求解する。また、それに合わせて密行列として扱う部分を変更して、同様にメモリ上に連続して格納する。これにより、LU 分解においてブロック対角行列部分から密行列部分の分解を行う際のデータ転送バッファと、密行列の LU 分解のデータ転送バッファが必要なくなるという利点がある。

また、サブストラクチャ法によるブロック部分の要素の計算では、LU 分解に必要な要素のみを各プロセッサで計算し、密行列部分に関しては要素計算後に LU 分解の精度を向上させるためにリオーダリングを行い、LU 分解時に要素が必要となるプロセッサにデータ転送して配置するため、大きなサイズのバッファが必要であった。しかし、リオーダリングを最初に行い、要素を計算するプロセッサを係数行列を計算する前に決定することにより、データ転送を削減することができ。

これにより、このアプリケーションの実行時の流れは、

1. リオーダリング
2. LU 分解時に必要な要素のみを並列に計算
3. ブロック部分の LU 分解
4. 密行列部分の LU 分解

のようになり、要素の計算部と LU 分解部でバッファを介したデータ転送を行っていたのが、提案する手法によってバッファ領域を小さく、また通信回数を削減することが可能となった。この結果、従来手法では、約 31 MB のメモリを使用していたが、約 22 MB ほどで済む。

## 3 提案する並列化手法の性能評価

本節では、有限要素・境界要素法を併用した電磁界解析アプリケーションを提案する手法に用いて並列化し、性能を Cenju-3 上で評価した結果について述べる。

Cenju-3 のアーキテクチャを図 2 に示す。Cenju-3 は、各プロセッサに CPU VR4400 (Cache 32Kbytes + 1Mbytes)、32MBytes または 64Mbytes のローカルメモリを持ち、最大

プロセッサ数 256 台の分散メモリ型並列計算機である。今回の評価はメインメモリ 32Mbytes、プロセッサ数 8 台のものを利用して、並列化ライブラリとして PARALIB/CJ ライブラリを用いて C 言語で行う。

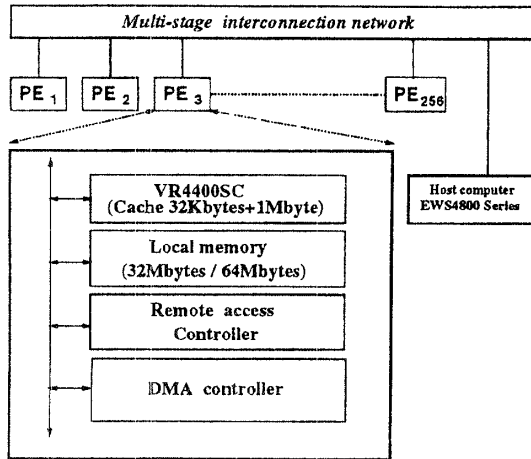


図 2: Cenju-3 のシステム構成

評価に用いたデータとして、鉄心を含むコイルの電磁界の求解問題 (非零要素は 25.6%、行列サイズ  $1069 \times 1069$ ) を例に評価する。なお、サブストラクチャの分割数についてはこの問題の有限要素法の節点数を考慮し、分割なし、2 分割、4 分割の 3 通りで行い、またプロセッサ数については粗粒度並列性がサブストラクチャの分割数までであるが、分割数より多いプロセッサを用いた時についても評価するため、1 台から 8 台までとする。

まず、データ転送最適化についての評価結果について述べる。LU 分解においてブロック部分の分解から密行列部分の分解に移る際のデータ転送時間が、サブストラクチャ法 4 分割で 4 台のプロセッサを用いたとき、従来手法では 711 ms かかっていたものが 363 ms となり処理速度が短縮された。

また、要素の所持法を変更した場合の実行時間は、従来手法でサブストラクチャ法による分割なしの場合、プロセッサ数が 1 の時に 759 秒かかっていたものが、表 1 に示すように 479 秒、分割数が 2 で 2 台のプロセッサを用いることによって 192 秒 (プロセッサ数 1 台に対して 4.0 倍)、分割数が 4 で 4 台のプロセッサを用いることによって 97 秒 (プロセッサ数 1 台に対して 7.8 倍) にまで実行時間が短縮された。

評価の結果、プロセッサ数が 1 の時についても、従来手法と比較して 31% ほど実行時間が短縮されることが確認された。また、サブストラクチャ法 4 分割でプロセッサ数 4 台で 87.2% 実行時間が短縮されていることが確認された。更に、速度向上率に関しても、サブストラクチャ法 4 分割のときにプロセッサ 1 台の実行時間に比べて 4 台では、従来 3.6 倍の速度向上であったのが 7.8 倍の速度向上となった。これは、係数行列の格納法を一般的な 2 次元配列から LU 分解を並列に実行するのに適した 1 次元配列に変更したことにより、バッファへの格納及び復元のオーバーヘッドがなくなったこと、メモリ上で連続に格納されていることによるキャッシュのヒット率の向上の 2 点が要因であると考えられる。

また、サブストラクチャの分割数は粗粒度並列性にかかわるので、並列サブストラクチャ法によって分割された有限要素法部分と境界要素法部分の並列性は分割数までとなる。これに対し、残りの密行列部分は通信のコストはあるものの、大きな並列性がある。このことから、並列処理による速度向上が得られるのはサブストラクチャの分割数までと予想され

表 1: アプリケーション全体の並列実行時間

サブストラクチャ 分割数	プロセッサ台数			
	1	2	4	8
1	478.9	240.1	121.9	65.9
2	383.2	191.8	100.4	56.7
4	378.7	190.3	97.2	53.1

(単位: s)

るが、提案する手法では、サブストラクチャ法 4 分割でプロセッサを 8 台用いても 1 台に対して 14.3 倍の速度向上が得られ、提案する手法がオーバーヘッドの軽減という観点からも有効であることが確認された。

#### 4 まとめ

本稿では、有限要素・境界要素併用法を用いた電磁界解析アプリケーションにおいて、通信部分の最適化、メモリ制約によるバッファの削減と、それによる通信オーバーヘッドの軽減する手法を提案した。また、Cenju-3 上にインプリメントし、実際の電磁界解析アプリケーションを用いて、提案する手法を評価し、表 1 に示すように、従来の並列化手法よりも実行時間を短縮できることを確認できた。

今後は、より大規模な問題にも取り組み、スケジューリング手法を採り入れることによりデータ転送を削減して、より効率的な処理手法の提案を行う予定である。

#### 参考文献

- [1] 若尾 真治、嶋崎 政仁、小貫 天: 有限要素・境界要素併用  $E-H$  法による三次元渦電流場解析、電気学会論文誌 A(112-11)、1992.
- [2] 小貫 天・若尾 真治: スカラポテンシャルを未知数とする有限要素・境界要素併用法による三次元電磁界解析、電気学会論文誌 A(112-5)、1992.
- [3] 矢川 元基・吉村 忍: 有限要素法、培風館、1991.
- [4] C.Farhat and E.Wilson: A New Finite Element Concurrent Computer Program Architecture, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987.
- [5] 前川 仁孝、坂本 哲也、小幡 元樹、若尾 真治、笠原 博徳、小貫 天、有限要素・境界要素併用法の並列処理手法、電気学会情報処理研究会資料、IP-96-29, Sep.1996.
- [6] C.Farhat and E.Wilson: A Parallel Active Column Equation Solverk Computers and Structures, Vol.28, 1988, pp.289-304