

直接法 Trefftz 法による 2 次元ポテンシャル問題解析について

北 栄 輔[†] 神 谷 紀 生^{††} 飯 尾 剛 良^{†††}

本論文では、直接法 Trefftz 法を 2 次元ポテンシャル問題に適用する。正則な T-complete 関数を重み関数としてとることで、支配微分方程式から境界積分方程式を導く。そして、積分方程式を境界要素で離散化して連立方程式を導く。この定式化法の計算精度は、係数マトリックスの悪条件化に強く依存している。そこで、係数マトリックスの悪条件化を改善する方法として、領域分割法を示す。

Application of Direct Trefftz Method to Two-dimensional Potential Problem

EISUKE KITA,[†] NORIO KAMIYA^{††} and TAKEYOSHI IIO^{†††}

In this paper, direct Trefftz method is applied to the two-dimensional potential problem. By taking regular T-complete functions as weight functions, boundary integral equation is derived from the governing differential equation. Then, the integral equation is discretized by boundary elements to derive the algebraic system of equations. The computational accuracy is strongly dependent on the ill-posedness of the coefficient matrix. So, in order to improve the ill-posedness of the coefficient matrix, the domain decomposition method is introduced.

1. 緒 論

Trefftz 法は、支配方程式を満足する非特異な関数である T-complete 関数を用いる境界型数値解析法である。境界型解法なので有限要素法などの領域型解法よりも入力データ作成は容易である。さらに、非特異な関数を用いるため特異な基本解を用いる通常の境界要素法よりも定式化は単純となる。

Trefftz 法の定式化は間接法と直接法に分けられる。間接法では、支配方程式を満足する T-complete 関数の線形結合で問題の解を近似し、近似解が支配方程式を満足するように未知係数を決定する。これに対して、直接法では T-complete 関数を重み関数として支配方程式から境界積分方程式を導き、これを離散化して境界条件を与えて解く。間接法は Trefftz¹⁾ により 1926 年に提案された定式化法であり、その後多くの研究者により研究が行われている^{2)~6)}。これに対して、直接法は 1989 年に Cheung ら⁴⁾ によって初めて提案された方法であり、まだ十分な研究が行われて

おらず、定式化の特徴も明らかでない。そこで、本研究では直接法 Trefftz 法を 2 次元ポテンシャル問題解析に適用し、その定式化の特徴を直接法境界要素法と比較して検討する。ところで、間接法 Trefftz 法では T-complete 関数の個数増加や解析対象が細長くなるのにもない、連立方程式の係数マトリックスが悪条件となって精度が低下することが報告されている。そこで、直接法 Trefftz 法について T-complete 関数の個数や解析対象の形状と係数マトリックスの悪条件化による計算精度低下の関係を検討し、その改善方法として Trefftz 法に適した領域分割法の定式化を示す。

本論文では、最初に直接法 Trefftz 法の定式化について述べ、これを簡単な例題に適用して計算精度と条件数の関係について検討する。そして、領域分割法の定式化を示してから、それを用いた直接法 Trefftz 法を簡単な解析例に適用する。

2. 基礎理論

2.1 2 次元ポテンシャル問題と T-complete 関数
2 次元ポテンシャル問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \quad (2)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \quad (3)$$

[†] 名古屋大学工学研究科機械情報システム工学専攻
Department Mechano-Informatics & Systems, Nagoya University

^{††} 名古屋大学情報文化学部
School of Informatics & Sciences, Nagoya University

^{†††} 株式会社マキタ
Makita Co. Ltd.

ここで Ω は解析対象領域を, Γ_1, Γ_2 はそれぞれポテンシャル u の指定境界, フラックス q の指定境界を示す. また \mathbf{n} は境界での単位法線ベクトルを, $(-)$ は指定境界条件値を示す.

T-complete 関数は支配方程式を満足する関数であり, 閉領域における 2 次元ポテンシャル問題については次式のように定義される²⁾.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu-1}^*, u_{2\mu}^*, \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{i\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{i\mu\theta}], \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, r^\mu \cos \mu\theta, r^\mu \sin \mu\theta, \dots\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

ここで (r, θ) は平面極座標であり, μ は正の整数である. また $j = \sqrt{-1}$ であり, \Re, \Im は複素関数の実部と虚部を示す.

2.2 積分方程式の導出

厳密解 u の代わりに近似解 (数値解) \tilde{u} を支配方程式 (1) に代入すると, 支配方程式は完全に満足されないで残差 R が生じる. つまり,

$$R = \nabla^2 \tilde{u} \neq 0$$

これに重み関数 v をかけて領域積分を行い, それを 0 とおけば次の重みつき残差式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Rvd\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla^2 \tilde{u}) vd\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla^2 u) vd\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

この式の左辺を 2 回部分積分すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 u) vd\Omega &= \int_{\Gamma} qvd\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \left[qv - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, 重み関数として T-complete 関数の線形結合を用いる. つまり,

$$v = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_M u_M^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (7)$$

ここで $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}^T$ は未知係数である. T-complete 関数は支配方程式を満足する関数なので, 次式が成り立つ.

$$\nabla^2 v = \mathbf{a}^T \nabla^2 \mathbf{u}^* = 0 \quad (8)$$

式 (7), (8) を式 (6) へ代入し,

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{n}} \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*$$

とおけば次式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{q} \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - u \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*) d\Gamma &= \\ \mathbf{a}^T \int_{\Gamma} (\mathbf{q} \mathbf{u}^* - u \mathbf{q}^*) d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

\mathbf{a} は任意であるから, 式 (9) が恒等的に成り立つためには次式が成り立たなければならない.

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{q} \mathbf{u}^* - u \mathbf{q}^*) d\Gamma = 0$$

これを T-complete 関数の各成分ごとに分けて記述すれば次式となる.

$$\int_{\Gamma} (qu_i^* - uq_i^*) d\Gamma = 0 \quad (10)$$

2.3 線形境界要素による離散化

境界積分方程式 (10) を適合線形境界要素によって離散化することを考える. 解析対象の境界 Γ を N 個の境界要素 Γ_j に分割すると次式を得る.

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (qu_i^* - uq_i^*) d\Gamma = 0 \quad (11)$$

要素 Γ_j 上での関数値を, 要素両端点にとられた節点値で線形近似する. つまり,

$$\left. \begin{aligned} u &= \phi_1 u_j + \phi_2 u_{j+1} \\ q &= \phi_1 q_j + \phi_2 q_{j+1} \end{aligned} \right\}$$

ここで ϕ_1, ϕ_2 は適合線形要素の内挿関数である. これを式 (11) に代入して整理すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \phi_1 q_i^* d\Gamma u_j + \int_{\Gamma_j} \phi_2 q_i^* d\Gamma u_{j+1} \right] \\ = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \phi_1 u_i^* d\Gamma q_j + \int_{\Gamma_j} \phi_2 u_i^* d\Gamma q_{j+1} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

または,

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (13)$$

ここで \mathbf{u}, \mathbf{q} は節点ポテンシャルベクトルと節点フラックスベクトルである. また, \mathbf{H}, \mathbf{G} は係数マトリックスであり, それらの成分は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Gamma_{j-1}} \phi_2 q_i^* dl + \int_{\Gamma_j} \phi_1 q_i^* dl \\ g_{ij} &= \int_{\Gamma_{j-1}} \phi_2 u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_j} \phi_1 u_i^* d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式 (13) に境界条件を与えて未知数だけを左辺に集めるように変形すると, 次式を得る.

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (15)$$

この式を未知数について解くことで, 境界上にとられた節点での関数値を決定する.

式 (15) の係数マトリックスについて, 行数は定式化に用いた T-complete 関数の個数に, 列数は未知数の和, つまり節点数に等しくなる. したがって, T-complete 関数の個数が節点数と等しいかそれ以上で

なければ方程式は不能となる．そこで，本研究では T-complete 関数の個数を節点数に等しくとることにする．また，式 (14) で用いる T-complete 関数としては，式 (4) の関数群中から任意のものを選択して用いることができる．しかし，定式化に用いる個々の T-complete 関数に含まれる r のべき乗の数 μ が大きく異なる場合，最終的に導出される連立方程式に含まれる係数マトリックスの条件数が非常に大きくなって計算精度が低下する可能性がある．したがって，計算精度の点からは r のべき乗の数の違いの少ないものを定式化に用いることが望ましい．そこで，本研究では式 (4) で定義された T-complete 関数を添え字の小さなもの，つまり $u_i^* = 1, q_i^* = 0$ から順番にとって定式化することにする．

2.4 直接法 Trefftz 法と直接法境界要素法との比較

これまでに述べたように，直接法 Trefftz 法では重み関数として T-complete 関数を用いることで積分方程式 (6) の右辺第 2 項を消去して境界積分項だけからなる境界積分方程式を導く．これに対して，直接法境界要素法においては，重み関数として基本解を用いて式 (6) の右辺第 2 項をソース点における未知関数値に変換し，領域積分項を消去している．つまり，Cheung ら⁴⁾ は明確に述べていないが，直接法 Trefftz 法の定式化は，重み関数として T-complete 関数を用いる直接法境界要素法と考えれば理解しやすい．ところで，直接法境界要素法を適合要素と選点法で定式化すると，境界法線や境界条件が変化する境界点（いわゆる，かど点）での節点のとり方が計算精度に大きく影響する．Cheung ら⁴⁾ は指摘していないが，直接法 Trefftz 法を用いればこの問題を改善できるので，以下ではこれについてももう少し詳しく述べることにする．

図 1(a) に示すようなかど点を考える．かど P_c 点は 2 つの境界の Γ, Γ' 接点であり，法線ベクトルを唯一に定義できない．直接法境界要素法で解析を行う場合， Γ と Γ' の両方でフラックス値が与えられているような場合には，かどに同じ座標値を持つ 2 つの節点を配置し，それらに異なる境界条件を与えて解析を行う．これを完全 2 重節点法と呼ぶことにする（図 1(b)）．しかし， Γ と Γ' の両方でポテンシャル値が与えられている場合などでは完全 2 重節点法を用いると係数マトリックスが特異となって解析できなくなる．そこで，このような場合は境界に沿ってかどから少しずらして 2 節点をとり，それらがそれぞれ Γ と Γ' に属するものとして解析を行う．これを近接 2 重節点法と呼ぶことにする（図 1(c)）．近接 2 重節点法では，2 節点の配置（特に，両者の距離）が計算精度に大きく影響す

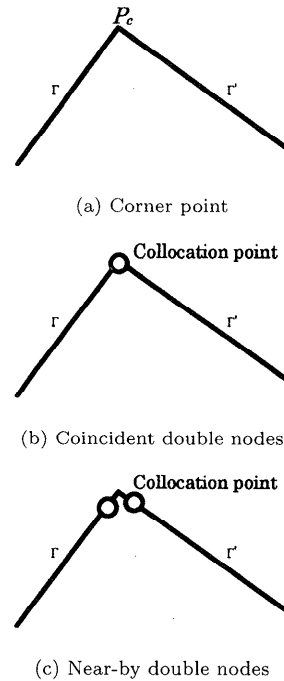


図 1 かど点での節点配置
Fig. 1 Placement of nodes on corner point.

るので，配置に注意しなければならない．

直接法境界要素法では重み関数として 1 種類の関数（基本解）を用い，異なるソース点について導出した積分方程式から連立方程式を構成する．したがって完全 2 重節点法を用いる場合，上記のように境界条件によっては連立方程式が特異となる場合が生じる．これに対して，直接法 Trefftz 法では異なる T-complete 関数を用いて導出した積分方程式から連立方程式を構成するので，直接法境界要素法のように完全 2 重節点法を用いても係数マトリックスが特異となることはない．そこで，以下の解析ではすべてのかど点に完全 2 重節点を用いることにする．

3. 解析例

ここでは簡単な例を用いて，先に示した定式化の有効性を検討する．続いて，解析対象の形状を細長くしながら，計算精度との関連を検討する．なお，これ以後の解析例において，連立方程式の解法には LAPACK⁷⁾ ソフトウェアの QR 分解を利用し，計算は Hewlett Packard 社製 WS の HP9000 Model 712 を用いる．また，解析に用いる T-complete 関数の個数は節点総数と同じとし，式 (4) に示されたものを第 1 項から順番に用いる．

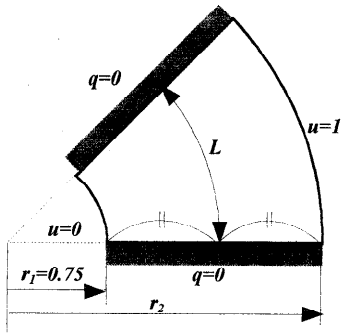


図 2 厚肉円筒
Fig. 2 Thick-walled cylinder.

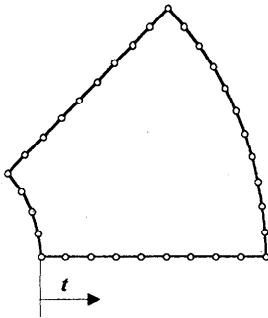


図 3 節点配置 (厚肉円筒)
Fig. 3 Nodes placement (Cylinder).

3.1 厚肉円筒の熱伝導問題

解析例として内半径 $r_1 = 0.75$ (m), 外半径 $r_2 = 3r_1$ である厚肉円筒の熱伝導解析を考える (図 2). 問題の対称性を考えて $1/8$ 領域を解析対象とする. 境界条件は, 内壁上で $u = u_1 = 0$, 外壁上で $u = u_2 = 1$, 対称軸上で $q = 0$ とする. 解析を行うために, 図 3 に示すように 37 個の節点を境界上にほぼ等間隔で配置し, 4 つのかどには完全 2 重節点を配置する.

数値解と理論解の比較を図 4 に示す. グラフの横軸は図 3 に示した接線座標で t ある. 実線は理論解を, 記号は数値解を示す. この図から, 理論解と数値解はよく一致していることが分かる.

3.2 正方形平板の熱伝導解析

第 2 の例題として正方形平板の熱伝導解析を考える (図 5). この問題では, 上辺においてフラックスの分布が特異性を示すことになる. 解析に用いた節点配置を図 6 に示す. 36 節点が全境界について均等に配置されており, かど点には完全 2 重節点がとられている.

数値解と理論解の比較を図 7 に示す. 横軸には図 6 に示した接線座標をとっている. 実線は理論解を, 記

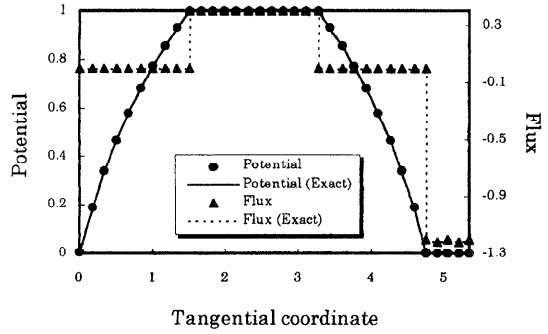


図 4 ポテンシャルとフラックスの分布 (厚肉円筒)
Fig. 4 Potential and flux distributions (Cylinder).

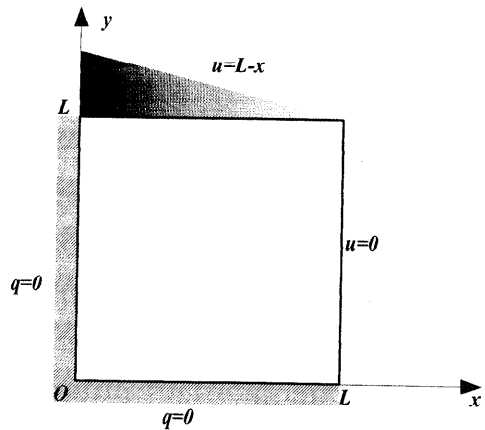


図 5 平板
Fig. 5 Square plate.

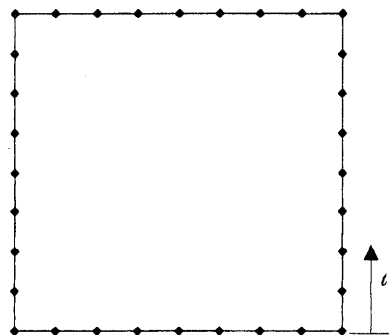


図 6 節点配置 (平板)
Fig. 6 Nodes placement (Plate).

号は数値解を示す. 図より, フラックスの特異点付近を除き, 理論解と数値解はよく一致していることが分かる.

3.3 条件数と計算精度の関連

緒論で述べたように, 間接法 Trefftz 法では細長い形

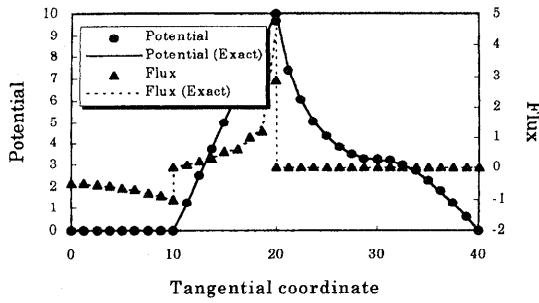


図7 ポテンシャルとフラックスの分布 (平板)
Fig. 7 Potential and flux distributions (Plate).

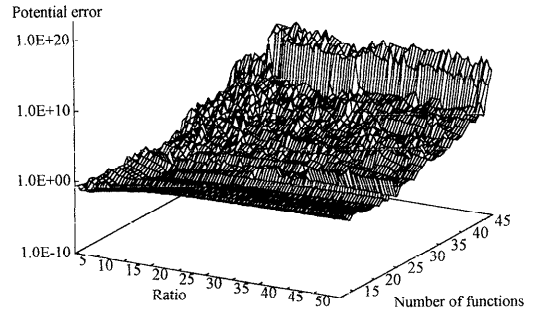


図9 ポテンシャル誤差
Fig. 9 Potential error.

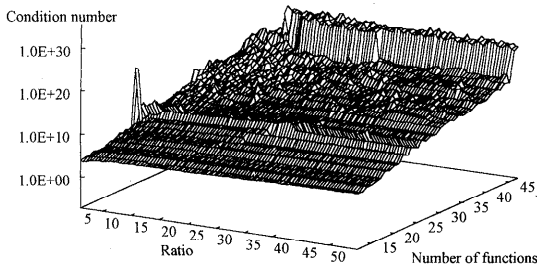


図8 条件数
Fig. 8 Condition number.

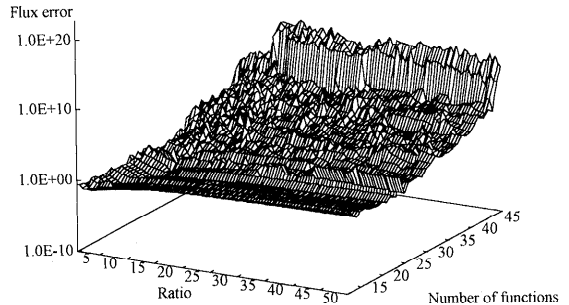


図10 フラックス誤差
Fig. 10 Flux error.

状などの解析において係数マトリックスが悪条件化し、計算精度が低下することが報告されている。ここでは、先に用いた厚肉円筒の熱伝導問題について細長さを表す指標 Ratio を定義し、これと係数マトリックスの条件数や計算誤差との関係を考える。また、T-complete 関数の個数と条件数の関係についても検討する。

図2に示された r_1 , r_2 , L を用いて解析領域の細長さを示す指標 Ratio を次のように定義する。

$$\text{Ratio} = \frac{L}{r_2 - r_1}$$

r_2 を r_1 に近づけることで解析対象を細長くしていく。節点は境界上にほぼ等間隔になるように配置し、4つのかどには2重節点をとる。Ratio, T-complete 関数の個数と係数マトリックスの条件数との関係を図8に、ポテンシャル誤差の増加やフラックス誤差との関係を図9と図10に示す。これらの図より、ポテンシャル誤差やフラックス誤差の増加と条件数の増加がよく一致しており、係数マトリックスの条件数増加が計算精度に大きく影響していることが分かる。また、Ratio と T-complete 関数の個数のいずれが増加しても条件数は増加しているが、一般に、Ratio よりも T-complete 関数の個数増加による条件数増加のほ

うが大きいことが分かる。これは、T-complete 関数は r^μ の関数であるため、Ratio が増加する場合は単に r が増加するだけであるが、T-complete 関数の個数が増加すると μ が増加するため、条件数の増加がより大きくなるためと考えられる。

以上の結果より、直接法 Trefftz 法では T-complete の個数を抑えれば、細長い形状でもかなり精度よく解析できると考えられる。しかし、直接法 Trefftz 法においては節点数を T-complete 関数の個数以下に抑えなければ連立方程式が不能となるので、大規模な問題を解くためには少ない節点数で精度よく解析する方法を考えなければならない。

4. 領域分割法

前章の計算結果より、係数マトリックスの条件数を抑えることが精度よく解析するために重要であり、条件数増加の主要原因が T-complete 関数の個数にあることが分かった。そこで、大規模な問題を解く場合に条件数を抑える方法として、ここでは領域分割法の利用を提案する。領域分割法により解析対象全体を部分領域に分け、部分領域ごとの節点数を少なくすることで条件数の増加を抑える。

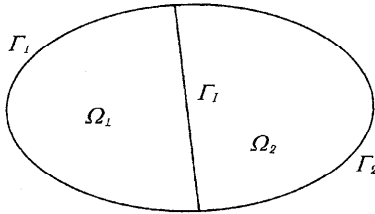


図 11 2 部分領域問題
Fig. 11 Two sub-domain problem.

直接法 Trefftz 法の定式化は直接法境界要素法とよく似ているので境界要素法の領域部分分割法を用いればよいが、任意の領域分割に有効な定式化として著者らの一部が以前に境界要素法のために提案している定式化法⁸⁾を適用することにする。

4.1 2 領域の場合の定式化

最初に解析対象が 2 つの部分領域からなる場合を例として、領域分割法について説明する (図 11)。部分領域を Ω_1, Ω_2 とし、それらの実境界を Γ_1, Γ_2 、2 つの部分領域間の仮想内部境界を Γ_1 とする。 Ω_1 について Trefftz 法を定式化すれば次の方程式を得る。

$$H^1 u^1 = G^1 q^1 \tag{16}$$

ここで、上添字は領域を示す。式の両辺に G^1 の逆行列を左から掛けると次式を得る。

$$(G^1)^{-1} H^1 u^1 = q^1 \tag{17}$$

ここで、 $K^1 \equiv (G^1)^{-1} H^1$ とおくと次式を得る。

$$K^1 u^1 = q^1 \tag{18}$$

同様な定式化により、 Ω_2 について次式を得る。

$$K^2 u^2 = q^2 \tag{19}$$

また、仮想境界上 Γ_1 では次式の条件が成り立たなければならない。

$$\left. \begin{aligned} u_I^1 &= u_I^2 \equiv u_I \\ q_I^1 &= -q_I^2 \equiv q_I \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

ここで、下添字 I は仮想境界 Γ_1 を表す。

(1) ポテンシャル値の計算

式 (18), (19) について行列、ベクトルの各成分を境界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1$ にあたる部分に分けて書くと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{1I}^1 \\ K_{I1}^1 & K_{II}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_I^1 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} K_{II}^2 & K_{I2}^2 \\ K_{2I}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_I^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

ここで下添え字は境界を示す。式 (21) の第 2 式と式

(22) の第 1 式を辺々加え合わせて式 (20) を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} K_{11}^1 u_1^1 + K_{II}^1 u_I^1 + K_{II}^2 u_I^2 + K_{I2}^2 u_2^2 &= q_1^1 + q_I^2 \\ K_{11}^1 u_1^1 + (K_{1I}^1 + K_{II}^2) u_I + K_{I2}^2 u_2^2 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

これを式 (21) の第 1 式、式 (22) の第 2 式と連立すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{II}^1 & 0 \\ K_{1I}^1 & K_{II}^1 + K_{II}^2 & K_{I2}^2 \\ 0 & K_{II}^2 & K_{II}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_I \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ 0 \\ q_2^2 \end{Bmatrix}$$

または

$$K u = q \tag{24}$$

この式は、部分領域ごとの係数マトリックスを全体係数マトリックスに重ね合わせるようにして構成されている。これは、ちょうど有限要素法で一般に用いられているアルゴリズムと同一である。こうして構成された連立方程式に対して、実境界には与えられた境界条件を、仮想内部境界には $q = 0$ (有限要素法における等価節点力の平衡条件) を与えて解けば、全節点でのポテンシャル値を求めることができる。

(2) フラックス値の計算

フラックス値を計算するためには、部分領域ごとの連立方程式 (式 (21) または (22)) に求められた計算値を代入すればよい。しかし、この場合すべての部分領域のマトリックスを保存しておく必要があるの、かなり大きな記憶容量を必要とする。そこで、この欠点を防ぐ方法を以下に示す。

式 (21) の全体と式 (22) の第 2 式だけを連立させると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{1I}^1 & 0 \\ K_{1I}^1 & K_{II}^1 & 0 \\ 0 & K_{II}^2 & K_{II}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_I \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_I \\ q_2^2 \end{Bmatrix}$$

または

$$K' u = q' \tag{25}$$

これにすでに求めたポテンシャル値を代入すれば、マトリックスとベクトルの積を計算するだけで仮想内部境界を含む全境界上での節点フラックス値を求めることができる。

式 (25) を用いれば、部分領域ごとの係数マトリックスを保管しておく必要はないので、記憶容量を節約できる。また、式 (24) と式 (25) を比較すると分かるように、係数マトリックスの違いは 2 行目の 2, 3 列目の小マトリックスだけである。したがって、式 (25) の係数マトリックスを式 (24) のそれと同一ループ内で生成させるようにプログラムすれば、計算コストを

かなり抑えることができる。

4.2 定式化のまとめ

上記の例では2部分領域からなる場合について定式化を示した。同様な定式化は、さらに多数の部分領域からなる問題にも成り立つ。そこで、ここではそのような場合を含めて、定式化のアルゴリズムを整理しておく。

- (1) 部分領域ごとに Trefftz 法を定式化し、連立方程式 $K^e u^e = q^e$ を得る。ここで上添え字 $e = 1, \dots, E$ は部分領域の番号であり、 E は部分領域の総数を示す。
- (2) 部分領域ごとの方程式を重ね合わせ、全体系方程式 $Ku = q$ を導く。また、このときにフラックス計算に用いる連立方程式 $K'u = q'$ も導出しておく。これらの処理は有限要素法と同様にして行われる。
- (3) 連立方程式 $Ku = q$ に対して、実境界には与えられた境界条件を、仮想内部境界には $q = 0$

と境界条件を与えて連立方程式を解く。

- (4) ステップ (3) で求めたポテンシャル値を $K'u = q'$ に代入し、フラックス値を計算する。

5. 領域分割法を用いた解析例

厚肉円筒の熱伝導問題に適用し、領域部分分割を適用することで条件数が改善できることを示す。解析対象の対称性を考慮して1/4 領域を考える(図12)。解析領域を図13に示すように3つの部分領域に分割し、それぞれに等間隔に節点を配置する。ポテンシャルおよびフラックスの境界上における分布を図14に示す。このグラフで、横軸は図13に示された接線座標で t である。記号は数値解を、実線は理論解を示すが、グラフより理論値と数値解はよく一致していることが分かる。この例題について領域分割を用いないで全体を単一領域と考え、実境界上に図13と同様に節点を配置して解析を行う場合、係数マトリックスの条件数は 10^{16} 程度以上となり、用いている連立方程式のソルバーでは精度よく解くことができない。これに対して、領域

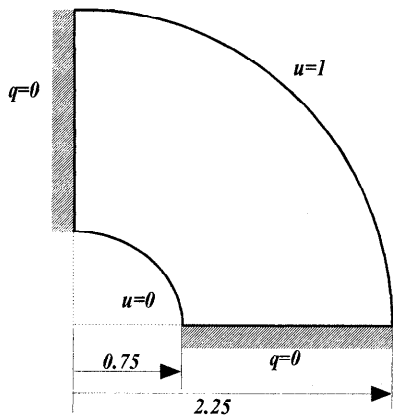


図12 厚肉円筒
Fig. 12 Thick-walled cylinder.

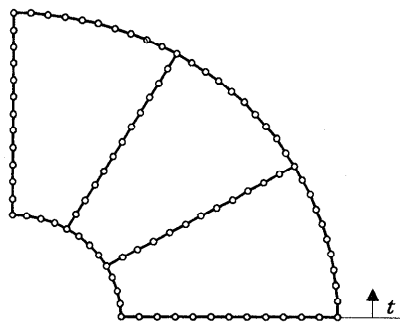


図13 節点配置(3部分領域)
Fig. 13 Nodes placement (Three subdomains).

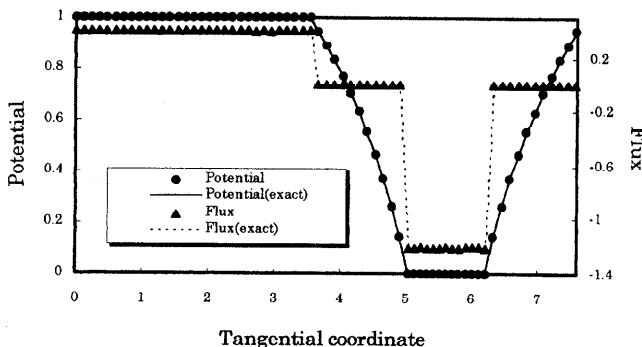


図14 ポテンシャルとフラックスの分布(3部分領域)
Fig. 14 Potential and flux distributions (Three subdomains).

分割法を用いれば条件数を 10^3 程度に抑えることができた。このことより、領域分割法の導入の有効性が確認できた。

6. 結 論

Trefftz 法の定式化は間接法と直接法に分類されるが、これまでは主として間接法が研究されていた。そこで、本研究では直接法 Trefftz 法を 2 次元ポテンシャル問題について定式化し、定式化の特徴について考察するとともに、T-complete 関数の個数や解析対象の形状と計算精度の関係について検討した。

まず、直接法 Trefftz 法の定式化を検討し、簡単な解析例に適用して次のような結論を得た。

- (1) 直接法 Trefftz 法の定式化は直接法境界要素法の定式化と類似しており、両者を重み付き残差式と考えれば、主たる違いは重み関数のとり方にある。
- (2) 直接法 Trefftz 法では、直接法境界要素法でみられるかど点での節点配置に関する問題を改善できる。
- (3) 直接法 Trefftz 法の計算精度は係数マトリックスの条件数に強く依存している。
- (4) 係数マトリックスの条件数の増加は形状の細長さと T-complete 関数の個数に依存しているが、T-complete 関数の個数のほうが影響が大きい。
- (5) T-complete 関数の個数を抑えれば、かなり細長い形状でも解析できる可能性が高い。

これらのことより、係数マトリックスの条件数増加を抑制しながら良好な計算精度を得る方法として、領域分割法の利用について述べた。領域分割法を利用することによって係数マトリックスの条件数を改善することは、すでに文献 9) などで述べられている。これに対して、本論文では直接法 Trefftz 法に適した領域分割法の定式化法について述べた。そして、提案する方法を簡単な解析例に適用し、直接法 Trefftz 法と領域分割法を併用することで、係数マトリックスの条件数を抑制できることを示した。ここで用いる領域分割法では、有限要素法などの領域型解析法で用いるメッシュ分割に比べてはるかに単純な領域分割で十分であるから、それにかかるデータ作成のコストは有限要素法などの領域型解法に比べてはるかに小さい。また、異なる材質からなる問題などでは領域分割を用いなければ解析できないので、提案する方法はそのような場合にも有効と考えられる。今後は、より実際的な問題への適用を検討していく予定である。

参 考 文 献

- 1) Trefftz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, pp.131-137 (1926).
- 2) Herrera, I.: *Boundary Methods: An Algebraic Theory*, Pitman (1984).
- 3) Zielinski, A.P. and Zienkiewicz, O.C.: Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.21, pp.509-528 (1985).
- 4) Cheung, Y.K., Jin, W.G. and Zienkiewicz, O.C.: Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions, *Comm. Appl. Num. Methods*, Vol.5, pp.159-169 (1989).
- 5) 北 栄輔, 神谷紀生, 池田洋一: Trefftz 法による 2 次元ポテンシャル問題の感度解析, 日本シミュレーション学会論文集, Vol.13, No.3, pp.247-255 (1993).
- 6) Jirousek, J. and Venkatesh, A.: Hybrid-Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.35, pp.1443-1472 (1992).
- 7) 小国 力: 行列計算パッケージ LAPACK 利用の手引き, 丸善 (1995).
- 8) 北 栄輔, 神谷紀生: 部分領域境界要素法, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.59, No.558, pp.415-421 (1993).
- 9) Canuto, C., et al.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, p.444, Springer-Verlag (1988).

(平成 9 年 3 月 10 日受付)

(平成 10 年 3 月 6 日採録)



北 栄輔 (正会員)

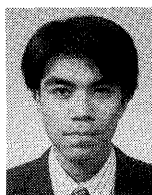
昭和 39 年生。平成 3 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程 (後期課程) 修了。工学博士。同年同大学助手に採用され、平成 6 年より同大学講師。数値解析法やコンピュータシミュレーション手法の基礎応用研究に従事。特に、最近では、遺伝的アルゴリズムやセルラ・オートマタを用いたシミュレーション手法の研究に力を入れている。IEEE, 日本機械学会, 応用数理学会, 計算工学会, シミュレーション学会等各会員。



神谷 紀生

昭和43年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。工学博士。現在、同大学情報文化学部教授。有限要素法、境界要素法、Trefftz法等数値解析法の基礎応用研究とコンピュータ

シミュレーション手法の研究に従事。日本機械学会、材料学会、応用数理学会、計算工学会、シミュレーション学会等各会員。



飯尾 剛良

平成9年名古屋大学大学院工学研究科博士課程（前期課程）修了。工学修士。同年（株）マキタ入社、現在に至る。