β節充足可能性問題の解法についての考察*

2M－2

山本雅人 † 　大柳俊夫 ‡ 　大内　東 †

† 北海道大学工学部　　‡ 札幌医科大学保健医療学部

1　はじめに

命題論理において，充足可能性問題は人工知能の分野の基本的な問題の一つである [1]．その解法として，Davis-Putnam の手続きをはじめ，様々な方法が提案されている [2][3]．一方，充足可能性問題を拡張した β節充足可能性問題がある [4]．これは，通常の節を β節に拡張して得られる問題であり，通常の節よりも記述が容易な制約があることが著者らによって示されている [5]．また，β節充足可能性問題に対する解法として，著者らは，IEMBSAT と呼ばれる手続き，および，Davis-Putnam の手続きを拡張した手続きを提案している [5][6]．本論文では，これらの解法について非決定的である分枝変数の選択に関する経験則について検討を行う．

2　β節充足可能性問題

2.1　β節

命題論理で扱う通常の節は，リテラルの選言として定義され，その節が真となることは，節中のリテラルの少なくとも一つが真であることと等価である．ただし，リテラルとは，原子論理式かまたはその否定である．これを拡張した β節は以下のように定義できる．

定義 1 (β節) β節とは，少なくとも β個 のリテラルが真となるとき，またそのときに限り真となる節であり，$C(\beta)$ と表す．このとき，β を $C(\beta)$ の次数という．

例えば，$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3\ (2)$ は，3 つのリテラル x_1, $\neg x_2$, $\neg x_3$ のうち 2 つが真であるとき，真となる β節であり，この節の次数は 2 である．次数が 1 である節は通常の節と同じものになる．

このように定義された β節に対して，以下の充足度，β単位節，矛盾節が新たに定義できる．

定義 2 (充足度) β節 $C(\beta)$ 中の真であるリテラルの個数を $C(\beta)$ の充足度という．

定義 3 (β単位節) β節 $C(\beta)$ 中のリテラルの個数と $C(\beta)$ の次数が等しい節を β単位節という．

定義 4 (矛盾節) β節 $C(\beta)$ 中のリテラルの個数より $C(\beta)$ の次数が大きい節を矛盾節という．

β節を用いることによって，以下のような制約を簡潔に表現することができる [7]．

- 少なくとも k 個のリテラルが真である
  $\rightarrow x_1 \vee \cdots \vee x_n(k)$
- 高々 k 個のリテラルが真である
  $\rightarrow \neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_n(n-k)$
- ちょうど k 個のリテラルが真である
  $\rightarrow (x_1 \vee, \cdots, \vee x_n(k)) \wedge (\neg x_1 \vee, \cdots, \vee \neg x_n(n-k))$

2.2　β節充足可能性問題

要素がすべて β節からなる集合 S_B を β節集合と呼ぶ．この β節集合に対する β節充足可能性問題 (β SAT) とは，以下の S_B 中のすべての β節を真とするような原子論理式への真理値の割当てが存在するかどうかを決定する問題である．

$$S_B = \{C_1(\beta_1), \cdots, C_n(\beta_n)\}$$

ただし，各 $C_i(\beta_i)$ は次数 β_i の β節であり，特に，$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 1$ であるとき，S_B は通常の節集合となり，β節充足可能性問題は，通常の充足可能性問題とみなせる．

*A Study on the Method for Solving Beta Satisfiability Problems
Masahito YAMAMOTO and Azuma OHUCHI
Faculty of Engineering, Hokkaido University
Toshio OHYANAGI
School of Health Sciences, Sapporo Medical University

3 Davis-Putnam の手続きの拡張

通常の節集合 S の充足可能性を判定する手続きとして Davis-Putnam の手続き (以下, DP) が一般に用いられる. DP は本質的に 1 リテラル規則, 分割規則の二つの規則からなる. この他にトートロジー規則, 純リテラル規則などがあるが, 計算効率の面から一般には用いられない.

[1 リテラル規則]

節集合 S' 中に単位節 l が存在すれば, S から l を含むすべての節を取り除く. また, S から $\neg l$ をすべて消去する.

[分割規則]

節集合 S' 中に現れるある原子論理式 P について, $S' \cup \{P\}$ と $S' \cup \{\neg P\}$ を生成する. これらの充足可能性を調べ, 共に充足不能なら S' は充足不能である.

これらの規則を節集合 S に対して用いながら, S' が空となれば元の節集合 S は充足可能であり, S' 中に空節が現れれば S は充足不能である.

この DP を β 節充足可能性問題を解くために拡張した手続き (以下, 拡張 DP) は, DP の 1 リテラル規則を以下の β 単位リテラル規則に置き換えることによって得られる.

[β 単位リテラル規則]

節集合 S' 中に β 単位節が存在するとき, β 単位節中の各リテラル l_i に対して, S' 中の l_i を含むすべての β 節の充足度を 1 つ増やす. また, $\neg l_i$ を含むすべてのリテラルを S' から消去する.

上の β 単位リテラル規則と前述の分割規則を用いながら, すべての節に対してその節の充足度が次数以上になれば充足可能であり, 矛盾節が生成すれば充足不能である.

4 分枝変数の選択規則

DP の計算効率は, 分割規則において選択される原子論理式 (分枝変数) に大きく依存することが知られている [3][7]. 従って, 拡張 DP においても同様に分枝変数の選択が計算効率に大きな影響を与えるものと考えることができる.

DP における分枝変数選択の経験則は, いくつか提案されている. これらの経験則は, ある変数が分枝することに対する評価値を考えている. この評価値は, その変数の出現する回数, 出現している節の長さ, および, その符号などによって計算される.

拡張 DP の分枝変数選択の経験則を考える場合, これらの他に変数の出現している節の次数や充足度について考慮する必要がある.

この拡張 DP における分枝変数選択の経験則について, 上記の評価値としてどのようなものが適切かをランダムに生成した問題に対する実験によって調べた. 実験方法の詳細, および, 結果, 考察については当日発表する予定である.

5 おわりに

本稿では, β 節充足可能性問題の解法である拡張 DP において, その計算効率に大きな影響を与える分枝変数選択の経験則について, 実験を行うことによって検討した.

参考文献

[1] Chang C. -L. and Lee R. C. -T. : Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, (1973).

[2] Davis M. and Putnam H. : A Computing Procedure for Quantification Theory. *Journal of the ACM*, Vol 7, pp. 201–215 (1960).

[3] Dubois O., Andre P., Boufkhad Y. and Carlier J. : Can a Very Simple Algorithm be Efficient for Solving the SAT Problem ?, via anonymous ftp from dimacs.rutgers.edu : /pub/ challenge/ sat/ contributed/ dubois/ dubois.tex.

[4] Hooker J. N. : Generalized Resolution and Cutting Planes. Annals of Operations Research, Vol. 12, pp. 217–239 (1988).

[5] 大柳, 山本, 大内 : 命題論理における β 節充足可能性問題とその解法, 電気学会論文誌 C, Vol 114–C, No. 7/8, pp. 796–804 (1993).

[6] 大柳, 山本, 大内 : 陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズム, 情報処理学会論文誌, Vol 34, No. 12, pp. 2464–2473 (1993).

[7] Yamamoto M., Ohyanagi T. and Ohuchi A. : Computational Results for Satisfiability Problems. In *Proceedings of APORS'94*, pp. 538–545 (1994)