

## 多重解像度解析を用いた数値データ補間\*

橋本 守†

NEC情報メディア研究所‡

3H-10

## 1 はじめに

平面上に数値データが不規則に配置されている場合に、そのデータを補間する曲面を生成する散乱データ補間 (scattered data interpolation) に関して、様々な手法が提案されている [2]。代表的な手法では、ドロネー三角形分割などの平面分割上で定義される区分的に滑らかな関数を用いている。しかし、これらの手法では、曲面の構造が複雑な平面分割の構造に依存しているため、簡略化された形状が容易には得られないという問題がある。テンソル積 B-スプライン曲面を用いれば、ウェーブレット変換によって、簡略化した形状が容易に生成出来る [5]。

テンソル積 B-スプライン曲面を生成するこれまでの手法では、数値データが格子状に配置された場合のみを扱っているか [3]、または、局所的に変動が大きい場合、曲面全体の形状に歪みが発生する [6] 問題があった。そこで、B-スプライン曲面に自然に導入される多重解像度解析 [4] に、データのフィルタリング処理を組み合わせて、曲面全体の形状の歪みを抑える、新しい補間手法を提案する。

## 2 提案手法のアルゴリズム

与えられた数値データの位置を包含する最小の長方形を考える。この上で定義されるテンソル積 B-スプライン曲面に自然に導入される多重解像度解析にもとづき、曲面階層  $f^1, f^2, \dots$  を補間に用いる。各曲面  $f^k$  は、制御点数が  $(2^k + 3)$  個の 3 次のテンソル積 B-スプライン曲面である。

まず、与えられたデータ  $\{v_j\}$  を  $f^1$  で近似する。そして、 $\{v_j\}$  と、データの位置における曲面の値  $\{f^1(p_j)\}$  との差  $\{\Delta v_j^1\}$  を計算する。次に、この  $\{\Delta v_j^1\}$  を  $f^2$  で近似する。曲面の和  $f = f^1 + f^2 + \dots + f^m$  が数値データを補間したとみなせるまで、このプロセスを繰り返す。

近似曲面  $f^k$  は、 $f$  と類似の処理によって作成する。ここでは、 $f^k$  と同数の制御点を持つ曲面の列  $f^{k1}, f^{k2}, \dots$  を用いる。まず、 $\{\Delta v_j^k\}$  から最初の曲面  $f^{k1}$  を生成し、データとの差  $\Delta v_j^{k1} = \Delta v_j^k - f^{k1}(p_j)$  を計算する。次に、 $f^{k2}$  を  $\{\Delta v_j^{k1}\}$  から生成する。この処理を  $f^{kmk}$  のノルムが十分小さくなるまで繰り返し、 $f^k = f^{k1} +$

$f^{k2} + \dots + f^{kmk}$  とする。

曲面  $\{f^{kl}\}$  を差分データ  $\{\Delta v_j^{(k-1)(l-1)}\}$  から生成する処理は、次のステップからなる (図 1)。

1.  $\{\Delta v_j^{(k-1)(l-1)}\}$  をオーバーサンプリングする ( $\Delta v_j^{(k-1)0} = \Delta v_j^{k-1}$  とおく)。
2. オーバーサンプリングしたデータをフィルタリングする。生成されるデータは  $(2^k + 1) \times (2^k + 1)$  個の 2 次元配列となる。
3. フィルタリングしたデータを補間する曲面  $f^{kl}$  を生成し、 $\{\Delta v_j^{(k-1)(l-1)}\}$  と  $f^{kl}$  との差を  $\{\Delta v_j^{(k-1)l}\}$  とおく。

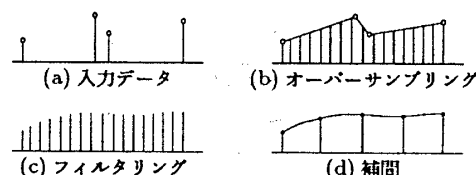


図 1: アルゴリズムの概念図

各ステップの詳細を、以下の節で説明する。

## 3 オーバーサンプリング

## 3.1 サンプル値の計算

サンプリングの位置が与えられたとき、その位置に対する値は次のようにして求める。

まず、その位置を含む三角形を求める。三角形分割の各三角形では、頂点が反時計回りに並べられているとすると、その三角形のすべての辺に対してその位置が左側にあるならば、その位置はその三角形に含まれている。ある辺に対して、その辺の方向ベクトルと、その辺の始点からその位置に向かうベクトルとの外積を計算し、 $z$  成分が正であるなら、その位置はその辺の左側にある。

そして、三角形内での重心座標  $(b_1, b_2, b_3)$  を用いて、値  $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$  を計算する。ここで、 $v_i$  は頂点  $p_i$  に対する値である。

## 3.2 サンプル値の間隔の決定

曲面の定義される長方形領域の対角座標が  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 、(ただし  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ ) で与えられ、サンプリング値の間隔が  $\Delta x, \Delta y$  であるとする。オーバーサンプリングでは、格子点  $(x_1 + i\Delta x, y_1 + j\Delta y)$ 、( $i, j$  は整数) における値を計算することになる。この  $\Delta x, \Delta y$  は、与えられたデータの位置の各々

\*Smooth Interpolation using Multiresolution Analysis

†Mamoru HASHIMOTO

‡Information Technology Research Laboratories, NEC Corporation

において、最も近いサンプリング値が、与えられた値とほぼ等しくなるように定める。

具体的には、 $\Delta x$ ,  $\Delta y$  は  $\Delta x = (x_2 - x_1)/2^s$ ,  $\Delta y = (y_2 - y_1)/2^s$  の形で与える。ここで、 $s$  は、上記の条件が成り立つように定める。

#### 4 フィルタリング

まず、2つの数列間の写像を定義する。

$V_k = \{v_j^k\}$  を  $(2^k + 1)$  個の値からなる数列とする。これに対する1次元フィルタリング写像  $g_k$  を次で定義する。

$$v_j^{k-1} = \frac{1}{6}v_{2j-1}^k + \frac{2}{3}v_{2j}^k + \frac{1}{6}v_{2j+1}^k \quad (1)$$

この写像で、 $V_k$  から  $V_{k-1}$  が生成される。 $j = 0$  のとき、 $v_{-1}^k$  として  $v_0^k$  を用いる。 $j = 2^k - 1$  のとき、 $v_{2^k+1}^k$  として  $v_{2^k}^k$  を用いる。

これらの写像を、オーバーサンプリングによって生成された数列に再帰的に施すことで、フィルタリングされたデータを得る。オーバーサンプリングされたデータの数を  $(2^s + 1)$ 、フィルタリングされたデータの数を  $(2^k + 1)$  とすると、 $g_s, g_{s-1}, \dots, g_{k+1}$  を順に施すことになる。

実際には、オーバーサンプリングされたデータは2次元配列であるので、上記の複合写像を配列の各列に対して施した後、各行に対して施す。

#### 5 曲面補間

テンソル積曲面で格子点を補間するので、2次元補間は1次元補間に帰着できる。1次元補間においては、ノットに対応する値を与えるとともに終端条件が必要になるため、ここでは両端の制御点2つずつがそれぞれ等しいとする条件をおいた。

#### 6 実験結果

Minimum Norm Network (MNN) 法との比較を行なう。実験用のデータは Nielson[1] が用いたものと同じである。各地点における値は、テスト関数  $f_0(x, y) = 0.25e^{-16((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}$  で与える。

作成した画像は、 $101 \times 101$  個の点でサンプリングした値を、グーローシェーディングで陰影付けしたものである。

図2は、 $f_0(x, y)$  の画像である。図3は、Minimum Norm Network 法によって生成した補間関数の画像である。 $C^1$  級の連続性しか持たないため、三角形分割の辺上にマッハバンド効果が現われている。図4は、提案手法によって生成した補間関数の画像である。 $f_0(x, y)$  に近い滑らかな関数が得られていることがわかる。

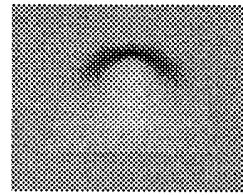


図2: テスト関数  $f_0$

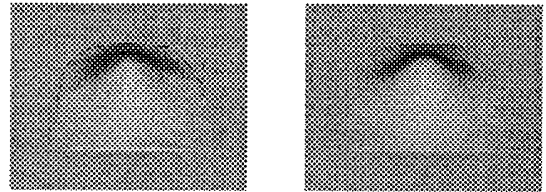


図3: MNN 法による補間

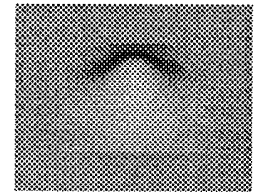


図4: 提案手法による補間

#### 7 まとめ

テンソル積 B-スプライン曲面を用いて散乱データを補間する新しい手法を提案した。B-スプライン曲面に自然に導入される多重解像度解析と入力データのフィルタリングを組み合わせることで、滑らかで形状の歪みが少ない曲面が生成できることを実験で確認した。

今後は、フィルタリング処理の高速化に取り組む予定である。

#### 参考文献

- [1] G. Nielson, "A Method for Interpolating Scattered Data Based Upon a Minimum Norm Network," *Mathematics of Computation*, vol.40, no.161, pp.253-271, January 1983
- [2] R. Franke, G. Nielson, "Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data," in *Geometric Modelling: Methods and Their Application*, H. Hagen and D. Roller, eds., Springer, Berlin, pp.131-160, 1991
- [3] D. Forsey and R. Bartels, "Surface Fitting with Hierarchical Splines," *ACM Transactions on Graphics*, vol.14, no.2, pp.134-161, April 1995
- [4] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992
- [5] A. Finkelstein and D. Salesin, "Multiresolution Curves," *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 1994, pp.261-268
- [6] S. Lee, K. Chwa, S. Shin, G. Wolberg, "Image Metamorphosis Using Snakes and Free-Form Deformations," *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 1995, pp.439-448