

曲率変化の滑らかな曲線の構成法

2H-6

-曲率パターンの Bézier 表現と曲線生成-

東京電機大学 ○渡辺由美子 斉藤 剛 豊田工業大学 東 正毅

1 はじめに

デザイナーの設計意図として重要な要因に、ハイライトや映像の映り込む位置およびその範囲などがある。これらの意図を反映した曲面形状を作るためには、曲面上の面法線方向の変化、すなわち、曲率の変化を制御する必要がある。

そこで筆者らは、曲面の構成曲線における曲率分布を直接規定することにより、曲率変化が滑らかな曲線を構成し、この曲線を基に曲面を構成することを考えた。まず、デザイナーの意図を満たす滑らかな曲率プロファイルを持つ曲線を生成する方法として、与えられた境界条件のもとに、目的とする曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線 (evolute) を決定し、そこから得られる伸開線 (involute) として目的とする曲線を得る方法を考案した^{1),2)}。さらに、これを発展させ、空間曲線の構成法と曲面生成への適用³⁾について述べた。また、このようにして生成された曲線の評価、および、曲率零を扱えるようにするために、線幅が路長の関数で変化する「傾斜スプライン」のモデルを構成し、曲率変化が滑らかな曲線を構成する方法を報告した⁴⁾。

さて、縮閉線による生成の場合、それを2次有理 Bézier 曲線で表す¹⁾と一意に定まり、自由度はない。3次 Bézier 曲線で表した²⁾場合、曲率パターンは変えられるが、両端点での曲率変化率は制御できない。生成曲線の高次接続を行う場合、この「両端点での曲率変化率の制御」が必要となる。

本報告では、傾斜スプラインの連続モデルの解を得ることを目的とし、路長に対する曲率パターンを3次 Bézier 曲線の形式で表現し、その曲率パターンを持つ曲線を構成する方法を述べる。

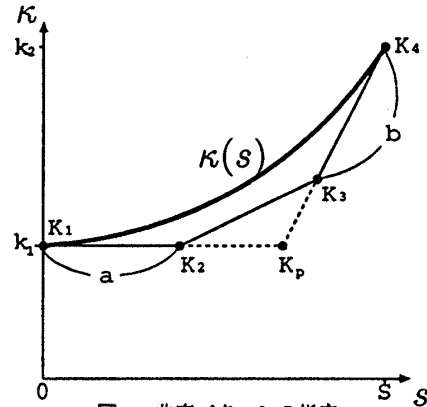


図1 曲率パターンの指定

2 傾斜スプラインのモデル

前報告⁴⁾では、スプラインを円弧列で近似した。ここでは、目的とする曲線を $y = y(x)$ とする。このように置くと、曲線の幾何条件を満たした上で、

$$I = \int_0^s (m(s) \cdot \kappa(s)) ds \quad (1)$$

を最小化する関数 $y(x)$ を求める問題となる。ここで、 $m(s)$ は、スプラインの幅に関連し、蓄積されるエネルギーの係数である。この $y(x)$ の一般的な解はないので、 $\kappa(s)$ の形を、次節以降で示すように限定した上で解くことを考えた。

3 曲率パターンの表現法

まず、曲率パターンの表現法について述べる。曲率パターンは、横軸に路長を、縦軸に曲率半径を取った曲率プロファイルにより表現する。本報告では、この曲率プロファイルを3次 Bézier 曲線の形式で表す。図1に、その概要を示す。

図1で、 $K_1 = (0, \kappa_1), K_4 = (S, \kappa_2)$ は、それぞれ、両端点での曲率半径の位置とする。また、 K_p は、両端点での曲率プロファイルの接線、すなわち、 $(\partial\rho/\partial s)$ の交点とする。ここで、線分 K_1K_p を $a : 1-a$ に、 K_4K_p を $b : 1-b$ に分割した点を、それぞれ、 K_2, K_3 と置く。このように設定した各点を制御点とした3次

Generation of Curves and Surfaces with Smoothly Varying Curvature

Yumiko WATANABE Tsuyoshi SAITOH

(Tokyo Denki Univ., 2-2 Kanda, Chiyoda-ku, Tokyo, 101)

Masatake HIGASHI (Toyota Technological Institute,

2-12-1, Hisakata, Tempaku-ku, Nagoya, 468)

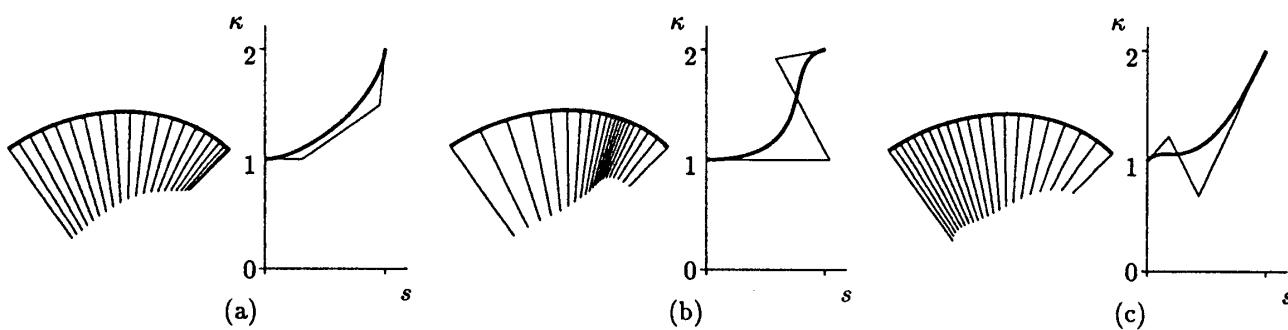


図2 3種類の曲率パターンを持つ曲線の生成例

Bézier 曲線 ($K(t) = (k(t), s(t))$)

$$K(t) = (t + (1-t)E)^3 K_0, \tag{2}$$

ただし, $E K_i = K_{i+1}$

により曲率プロファイルを表す.

4 幾何拘束

先の縮閉線による曲線生成では, 目的とする曲線の両端点の位置, 接線, 曲率半径を拘束条件とした. 本法ではさらに, 両端点での曲率の傾きも指定できる. つまり, 前節での a, b, S に自由度が与えられる.

さて, $d\theta/ds = \kappa(s)$ (s は目的曲線上の路長を表す) であるので, 目的とする曲線の両端点での接線方向の差を $\Delta\theta$ とすると, $\Delta\theta = \int_0^S \kappa(s) ds$ が成り立たなければならない. これは, 曲率プロファイルと s 軸で囲まれた部分の面積が, $\Delta\theta$ と等しいことであり,

$$\Delta\theta = \int_0^1 k(t) \cdot \frac{ds(t)}{dt} dt \tag{3}$$

となる. ここで, 例えば, 上式の S と a を固定すれば, b が一意に定まる. 従って, 自由度は2となる. この自由度は, 曲線の始終点の x 軸と y 軸の差により決定される.

5 曲線の生成例

前述の方法で, 与えられた幾何拘束を満たす曲率プロファイル $k(t)$ が与えられると, 実際の曲線は,

$$\begin{aligned} dx/ds &= \sin \theta(s), dy/ds = \cos \theta(s), \\ d\theta/ds &= \kappa(s) = k(s(t)), \\ ds/dt &= ds(t)/dt \end{aligned} \tag{4}$$

の3つの微分方程式を解くことにより求められる. (x, y) の初期値は目的曲線の始点, θ の初期値は, 始点

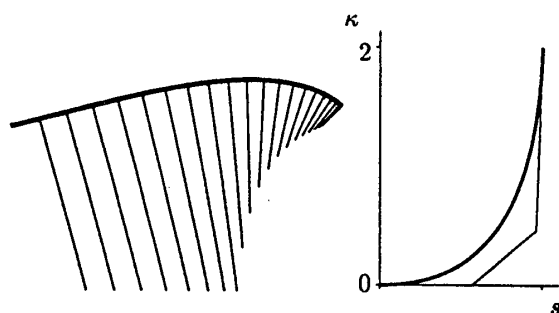


図3 始点での曲率が0の例

の接線方向である. 図2は, $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$ とした場合の異なる3種類の曲率パターンをもつ曲線の生成例である. 生成曲線と曲率プロファイルを示す. 微分方程式の数値解法には, 2次のRunge-Kutta法を用いた. また図3には, 始点での曲率が0の曲線の生成例を示す.

6 おわりに

本報告では, 曲率パターンを3次Bézier曲線で表すことにより, 両端点の位置, 接線, 曲率半径, さらに両端点でに曲率の傾きを指定した曲線を生成する方法を述べた. これより, 高次の接続ができるようになった. 今後は, 傾斜スプラインの解法への応用, 生成曲線の性質の解明, 空間曲線生成への応用などが課題である.

参考文献

- 1) 東, 毛利, 斉藤:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線曲面の構成法-第1報」, 精密工学会論文誌, 1994/4.
- 2) 斉藤, 渡辺, 東:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線の生成」, 情報処理学会春期大会, 1994/3.
- 3) 東, 他:「縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線曲面の構成法-第2報, 第3報」, 精密工学会論文誌.
- 4) 渡辺, 斉藤, 東:「曲率変化の滑らかな曲線の生成」, 情報処理学会春期大会, 1995/3.