

雷雲電荷分布逆推定ツールとしての無限境界要素

3C-5

水巻純一、堀田裕弘、村井忠邦、池田長康
富山大学工学部

1 まえがき

地表付近の電界を観測することにより雷雲の様子を推定することができれば、送電系への雷害予知にもつながるが、推定方法が十分に検討されていない[1]。

本研究では、境界要素法を用いた逆問題的手法により大気中の雷雲電荷分布推定を行なうためツールを開発した。すなわち、雷雲の存在する対象領域が無限に広がっているため、無限遠までの効果を考慮する必要があり、このためのツールとして無限境界要素を考え、その精度や妥当性などについての検討を行なった。簡単なモデルによる推定のシミュレーション結果についても示す。

2 順問題

2.1 計算方法

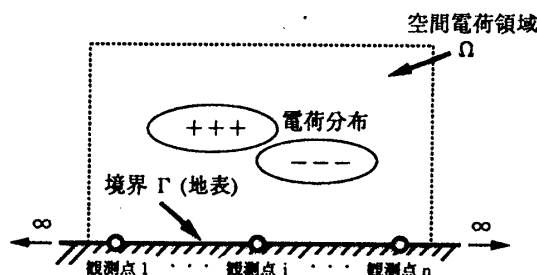


図1：雷雲の模式図

図1を参照して、無限に広がる領域の一部領域Ω内に点電荷が存在したときに地表での電界の大きさを求める問題を考える。支配方程式及び境界条件を以下に示す。

$$\nabla^2 \phi + \frac{Q}{\epsilon} = 0 \quad \text{in } \Omega \text{ (大気中で)} \quad (1)$$

$$\phi = \hat{\phi} (= 0) \quad \text{on } \Gamma \text{ (地表で)} \quad (2)$$

ただし、 ϕ は電位、 Q は電荷、 ϵ は誘電率、記号 $\hat{\phi}$ は既知の値を表す。また、境界 Γ は無遠まで広がっているものとする。

式(1)と式(2)を境界要素法で離散化すると次式が得られる。

$$[H]\{\phi\} - \{\psi\} = [G]\{q\} \quad (3)$$

Infinite Boundary Element as a Tool for estimating Thundercloud Charge Distribution
Jun'ichi MIZUMAKI, Yuukou HORITA, Tadakuni MURAI, Nagayasu IKEDA
Toyama University

ここで $\{\phi\}$ は地表を要素分割したときの要素節点の電位、 $\{q\}$ は地表付近での電界の大きさであり、 $q = \partial\phi/\partial n$ で与えられる。また $\{\psi\}$ の成分 ψ_i は、節点 i の位置と電荷の位置・電荷量とから求まる定数であり、2次元問題においては次式で与えられる。

$$\psi_i = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r} \quad (4)$$

ただし r は、単位電荷 Q を負荷した点から地表に設定された節点 i までの距離を表している。

係数 $[H]$ 、 $[G]$ は節点位置から決定される係数であるが、地表(電位ゼロの境界)が無遠に及ぶので、通常の境界要素法と異なって特別の工夫が必要である[2]。

2.2 無限境界要素

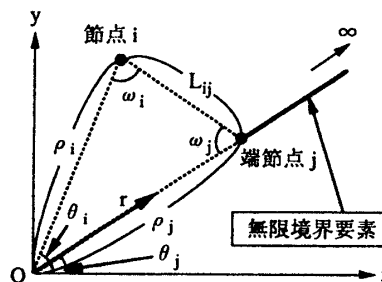


図2：無限境界要素

今回、無限遠までの効果を考慮するために無限境界要素を考えた。この要素では、図2に示すように要素を円筒座標 (r, θ, z) で表したとき、電位が $1/\rho$ に比例して変化する(無限遠で電位ゼロ)と仮定されている。最終的に得られる要素係数は i を節点番号、 j を端節点番号とすると、以下の式で得られる。

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ \frac{\rho_j}{2\pi\epsilon\rho_i} \left\{ \left(\ln \frac{L_{ij}}{\rho_j} \right) \sin \theta_{ij} + \omega_j \cos \theta_{ij} \right\} & (i \neq j) \end{cases} \quad (5)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} -\frac{\rho_i}{2\pi\epsilon} \ln \rho_i & (i = j) \\ \frac{\rho_j^2}{2\pi\epsilon\rho_i} \left\{ \left(\ln \frac{L_{ij}}{\rho_j} \right) \cos \theta_{ij} - \omega_j \sin \theta_{ij} - \frac{\rho_i}{\rho_j} \ln L_{ij} \right\} & (i \neq j) \end{cases} \quad (6)$$

式(5)、式(6)によって決定された数値を、通常の境界要素法で得られる $[H]$ と $[G]$ にそれぞれ組み込むことにより、無限境界要素を考慮した離散化代数方程式が得られる。ただし θ_{ij} は、 $\theta_{ij} = |\theta_i - \theta_j|$ 。

2.3 計算結果

図3に計算モデルの要素分割図を示す。モデルのサイズは x 方向に 2,000[m]、要素数は 40 とする。領域内の点電荷の個数は 2 個とし、位置及び電荷量をそれぞれ (200, 300) に +2.0[C]、(-100, 500) に -4[C] とした場合の計算結果を図4に示す。図より、一定要素の場合の方が比較的精度が良いことがわかる。

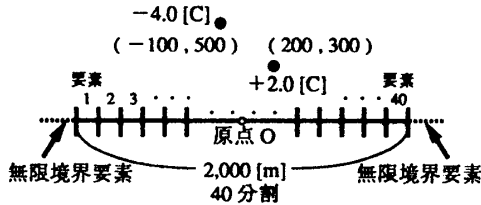


図3：要素分割図

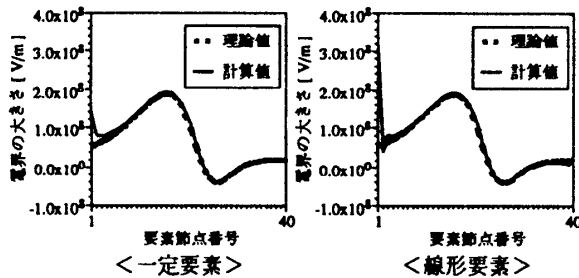


図4：結果図(順問題)

3 逆問題

3.1 計算方法

図1を参照して、地表付近で観測された電界の大きさをもとにして、領域内の電荷分布を推定する問題を考える。以下に、一つの推定方法を提案する。

図1のモデルにおいて、もし電荷量と位置とがわかれば、式(3)から

$$[H]\{\phi\} - \{\psi\} - [G]\{q\} \rightarrow 0 \quad (7)$$

となる。ここで、要素の各節点を大地に置いているので、式(7)において $\{\phi\} = 0$ としてよい。すなわち、式(7)は以下のように書き直すことができる。

$$\{F\} \equiv [G]\{q\} + \{\psi\} \rightarrow 0 \quad (8)$$

しかし逆問題においては、一般に電荷量と位置は未定であり、電荷量と位置を勝手に与えて式(8)を計算すると $\{F\} \neq 0$ となる。従って、以下の式によるニュートン法を適用することを考える。

$$\frac{\partial \{F\}}{\partial \{X\}} \{\Delta X\} = -\{F\} \quad (9)$$

$$\{X_{new}\} = \{X_{old}\} + \{\Delta X\} \quad (10)$$

ここで $\{X\}$ は、点電荷の x 座標、 y 座標、電荷量を成分とするベクトルである。

式(9)及び式(10)の収束条件は

$$\|F\| < \alpha \quad (11)$$

(α は十分に小さな値)とする。つまり、この計算を繰り返していき、 $\{F\} \rightarrow 0$ となれば、電荷量と位置とが推定されたことになる。

3.2 逆問題の数値例

要素分割図、モデルのサイズ、要素数は図3と同じものとし、仮定して置く点電荷の個数は2個、推定する点電荷の個数も2個とする。要素には一定要素を用い、無限境界要素も考慮してある。また今回は、境界要素法を用いて計算した電界値を観測データとして扱った。

図5に計算結果を示す。モデルの領域内の(200, 300)に +2[C]、(-100, 500)に -4[C]の2個の点電荷が存在すると仮定し、初期値として(500, 100)に +1[C]、(-500, 100)に -1[C]と設定して推定を行なった。図は、繰り返し計算に伴って、推定値が推移していく様子を示している。なお、図中にプロットされた円の大きさは、点電荷の相対的な電荷量を表すものとする。また、観測点として x 軸上に示した6点を選択した。

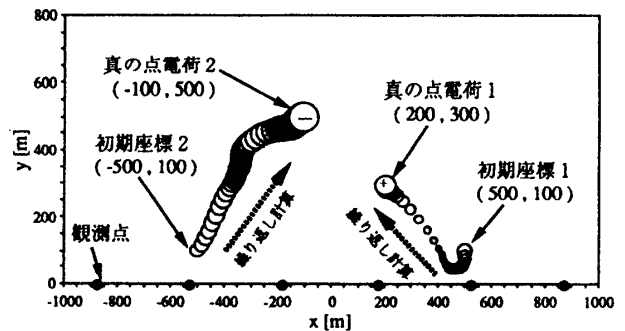


図5：結果図(逆問題)

4 あとがき

無限境界要素として、一定要素に付加することと線形要素に付加することを考えたが、一定要素の方が比較的良い精度が得られた。

また、逆問題については、境界要素法を用いて計算した電界値を観測データとして扱ったので、今後は実測のデータを用いて計算を行なっていきたい。

なお、本研究は、一部、(財)北陸活性化センター研究助成金(HIAC第197号)の補助を受けた。

5 参考文献

- [1] 水巻、堀田、村井、北村、池田：”有限要素モデルによる雷雲電荷分布推定のシミュレーション”，平成6年度電気関係学会北陸支部連合大会講演論文集 A-54(1994)
- [2] 加川：”開領域問題のための有限/境界要素法”，サイエンス社(1983)