

# Reaction - Diffusion Equations の

3E-4

## Fractal 次元における解析

大坪 敏昌, 谷 温之, 野寺 隆  
慶應義塾大学数理科学科

### 1 はじめに

今回、扱う反応拡散方程式 (Reaction - Diffusion Equations) は、有界かつ連続な解と、コンパクトなアトラクターをもつと仮定したものである。このときに、例を用いて、数値的にハウスドルフ次元を求め、その次元の解析を行うことにする。

### 2 ハウスドルフ次元に関する定理

この節では、今回用いた次元を求める定理について述べる。

方程式

$$u'(t) = F(u(t)), \quad u \in H: \text{ヒルベルト空間}$$

を線形化した方程式

$$U'(t) = F'(u(t)) \cdot U(t)$$

の解  $U_1, \dots, U_m$  について、次の関係式が成り立つ。

$$|U_1(t) \wedge \dots \wedge U_m(t)| = |\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_m| \times \exp\left(\int_0^t \text{Tr}(F'(u(\tau))) \circ Q_m(\tau) d\tau\right)$$

ただし、 $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) は  $U_i$  の初期値、 $Q_m$  は  $U_1$  から  $U_m$  で張られる空間への写像とする。このとき、上式の右辺の評価をリアプノフ指数 (Lyapunov exponents)  $\mu_i$  を用いて表すと

$$\mu_1 + \dots + \mu_m \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} q_m(t),$$

The analysis for the Fractal dimensions of the Reaction-Diffusion Equations  
Toshimasa Otsubo, Atusi Tani, Takashi Nodera  
Keio University

$$q_m(t) = \sup_{u_0 \in X} \sup_{\substack{\xi_i \in H \\ |\xi_i| \leq 1}} \left( \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}(F'(u(\tau))) \circ Q_m(\tau) d\tau \right)$$

となる。ただし、 $u_0$  は  $u(t)$  の初期値、 $X$  は空間  $H$  内の不変集合とする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.1  $n \geq 1$  に対して

$$\mu_1 + \dots + \mu_{n+1} < 0$$

が成り立つならば、

$$\mu_{n+1} < 0, \quad \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{|\mu_{n+1}|} < 1$$

を満たし、空間  $X$  のハウスドルフ次元  $d_H(X)$  は

$$d_H(X) \leq n + \frac{(\mu_1 + \dots + \mu_n)_+}{|\mu_{n+1}|}$$

である。ただし、 $(\mu_1 + \dots + \mu_n)_+$  は値が正となる最大の  $n$  までの和を表している。

### 3 数値例

#### 3.1 ローレンツ型方程式

次のような初期-境界値問題を考える。(以後、初期値、境界値はすべての方程式で共通とする) 領域  $\Omega = (0, 1)$  であり、 $\Gamma$  は  $\Omega$  の境界とする。

$$\begin{cases} u_{1t}' - \nu \Delta u_1 + \sigma u_1 - \sigma u_2 = 0, \\ u_{2t}' - \nu \Delta u_2 + \sigma u_1 + u_2 + u_1 u_3 = 0, \\ u_{3t}' - \nu \Delta u_3 + b u_3 - u_1 u_2 + b(r + \sigma) = 0 \end{cases}$$

in  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , (1)

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega.$$

$\nu \geq 0$  は粘性係数であり,  $u_0$  は与えられているものとする. また,  $\sigma, b, r$  は次の関係式を満たす定数とする.

$$\sigma > 0, \quad b > 1, \quad r > 0.$$

このときの問題 (1) のアトラクターのフラクタル (ハウスドルフ) 次元は, 次の表のようになる.

$\nu$	A	B	C
0	2.43476	2.45331	2.54168
0.5	1.91059	1.60292	2.22053
1.0	1.45066	1.20335	2.00572

A :  $(\sigma, b, r) = (10, \frac{8}{3}, 28)$

B :  $(5, \frac{4}{3}, 14), \quad C : (20, \frac{16}{3}, 56)$

表 1 ハウスドルフ次元の比較

### 3.2 ミネア型方程式

$$\begin{cases} u_1' - \nu \Delta u_1 + u_1 + \delta(u_2^2 + u_3^2) = 1, \\ u_2' - \nu \Delta u_2 + u_2 - \delta u_1 u_2 = 0, \\ u_3' - \nu \Delta u_3 + u_3 - \delta u_1 u_3 = 0 \end{cases}$$

この方程式のアトラクターのフラクタル次元は, 次の表になる.

$\nu$	0	0.2	0.8	1.0
$\delta = 1.0$	2.143	1.125	0.000	0.000
$\delta = 10.0$	2.885	2.565	2.009	1.716

表 2 ハウスドルフ次元の比較

## 4 考察

表 1 と表 2 を見ると,  $\nu$  の値が増えることにより, ハウスドルフ次元の値が減少している. これは,  $\nu$  が粘性係数と呼ばれるものであり, この値が増えることで解の収束時間が速くなりアトラクターの大きさもそれにつれて小さくなるためである.

表 1 の  $\nu$  が 0 のときの結果は, Lorenz[2] が示したローレンツモデルの結果 (Temam[1]) と一致している. このことからこの方程式はローレンツモデルを含んでいると考えられる. 同様なことがミネア型方程式についてもいえる.

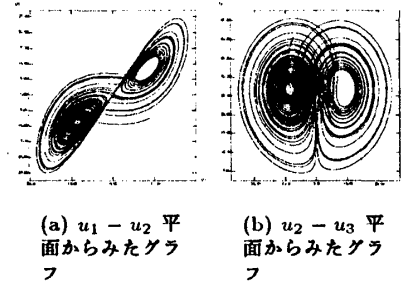


図 1  $\nu = 0$  における軌道

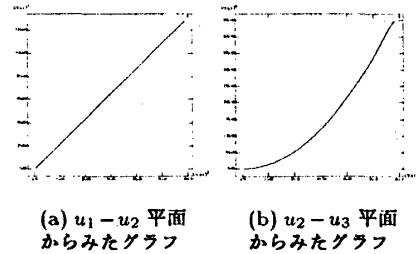


図 2  $\nu = 1$  における軌道

2つの方程式の粘性係数  $\nu$  とアトラクターのハウスドルフ次元の関係で次元の値が 2 および 1 をとるときに変曲がおきている. この現象は, この値の前後で, 解の分岐 (bifurcation) がおきていると考えられるからである. 実際に, ローレンツ型方程式について粘性係数の値が  $\nu = 0, \nu = 1$  の場合の軌道 (trajectory) をみみると,  $\nu = 0$  の場合はカオス的な振舞いをしているのに対して,  $\nu = 1$  の場合は 2つの臨界点  $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ , (ただし,  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$  の場合) の間を結ぶ曲線になっているからだ.

## 参考文献

- [1] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and physics*. Springer - Verlag, 68, 1988.
- [2] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmospheric Sci., 20, 1963, 130-141.
- [3] 大坪 敏昌, 谷 温之, 野寺 隆「Reaction - Diffusion Equations の Fractal 次元」情報処理学会研究報告 ハイパフォーマンスコンピューティング, No54, 1994, 1-6