

## 三角形分割の最適性と整数計画による定式化

田 島 玲<sup>†,††</sup> 今 井 浩<sup>††</sup>

二次元における三角形分割については多くの研究がなされてきているが、FEMをはじめ応用上も重要である三次元での三角形分割については、平坦さ、角度、三角形分割の要素数をはじめとする様々な性質はあまり知られていない。本論文では、三次元となることで三角形分割の特性、最適性にどのような違いが出てくるかを紹介し、整数計画法を用いた実験を通してこれらを実証する。一般次元での三角形分割に対する整数計画法による定式化として、既存の関連研究を整理、また一部を拡張し、1) 安定集合問題に基づく定式化、2) 集合分割問題に基づく定式化の2種類としてとらえ、比較検討を行う。理論上/応用上興味深い最適化の目的関数に関する考察を加えるとともに、これらに基づいた計算機実験の結果を示し、検証する。特に、二次元では万能と見られている Delaunay 三角形分割が三次元では基準によっては最適値から大きく離れることが確認できた。

## Optimality and Integer Programming Formulations of Triangulations

AKIRA TAJIMA<sup>†,††</sup> and HIROSHI IMAI<sup>††</sup>

The properties of triangulations, and their differences between two and three dimensions, are computationally investigated by using integer programming (IP). Two IP formulations of triangulations are compared, one based on the stable set problem, and the other based on the set partitioning problem. Some properties that are interesting from a theoretical or practical point of view are considered as objective functions for IP. Finally, some computational results are given. By this approach, three-dimensional triangulations can now be treated in a flexible and efficient way, and interesting properties of three-dimensional triangulations have been newly found.

### 1. はじめに

Delaunay 三角形分割とその双対である Voronoi 図をはじめとして、計算幾何学の一分野として三角形分割については多くの研究がなされている。しかし、その多くが二次元でのものであり、高次元については従来二次元ほど着目されていなかった。一方、近年の計算機性能の進歩とともに三次元での応用（すなわち、三次元立体の四面体による分割）が増えてきている。有限要素法（以下、FEM）では、三次元の部品の強度解析のために、非凸の三次元多面体をメッシュに分割する必要がある。このメッシュは必ずしも三角形である必要はなく、むしろ、現場レベルでは四角形（六面体）が好まれる傾向がある<sup>1)</sup>。しかし、四角形メッシュ生成は技術的に困難であり、実用的なシステムで

自動生成機能を備えるものは三角形メッシュを採用している。メッシュ生成法には、部分領域分割法、階層的空間分割法、再帰的二分割法、Advancing Front 法、ノード結合法など様々な手法があり<sup>2)</sup>、点集合の三角形分割は、このうちの1つであるノード結合法の要素技術として位置づけられる。ノード結合法はまず対象内部に点を分布させ、次にその点を使った三角形分割を求めるという方法である。考え方の単純さ、二次元、三次元領域での統一的な扱いから近年さかんに研究されている<sup>2)</sup>。

炎、煙など半透明なものの表示や、FEMの結果の可視化技術である Volume Rendering も三次元の三角形分割を必要とする<sup>3),4)</sup>。物体の表面のみを表示する通常のCGと異なり、可視化の対象となる空間全体を分割するためである。FEMの場合と異なり、Volume Renderingでは三角形のメッシュが好まれる。これは、四面体では内部の任意の点での線形補完が一意に定まり、また、CG用のAPI、ハードウェアなどが三角形に特化しているという理由による<sup>5),6)</sup>。

このように需要は増えつつあるものの、三次元での

<sup>†</sup> 日本アイ・ビー・エム株式会社東京基礎研究所  
Tokyo Research Laboratory, IBM Research

<sup>††</sup> 東京大学理学部情報科学科  
Department of Information Science, University of Tokyo

三角形分割の特性は十分に知られていない。たとえば、Delaunay 三角形分割は、二次元では“最小角最大化”をはじめ様々な最適性を示すことで知られており、FEM のためのメッシングでは Delaunay 性を保ちつつメッシュを生成していく手法も見られる<sup>7)</sup>。しかし、2章で示すように Delaunay 三角形分割は、三次元では二次元の場合のように万能ではない。

また、理論上重要な特性として、三次元以上では三角形分割の要素数は一定ではない(2.1節参照)という点がある。高次元の多面体の体積計算<sup>8)</sup>などの目的から、こうした要素数の上、下限は重視されており、たとえば文献9)では内点を含まない三次元の凸多面体のケースについて解析している。

本論文では、目的に即した三角形分割、すなわち、何らかの尺度で最適性を示す三角形分割を求める方法として整数計画法を取り上げる。三角形分割を整数計画との関連でとらえた既存の研究としては、三角形分割の列挙に安定集合問題を適用した文献10)、二次元での辺長和最小三角形分割に特化して最適化を行った文献11)、集合分割問題として定式化した文献12)、有向マトロイドを用いた代数的に解析した文献13)があるが、異なった観点から独立に書かれている。そこで、「整数計画による最適化」という観点からこれらの定式化を整理し、1) 安定集合問題、2) 集合分割問題にそれぞれ帰着される2種類としてとらえる。さらに前者については、低次元の単体に着目し一般化安定集合問題へと拡張することにより冗長性を取り除き、効率の良い定式化を与える。

本論文は以下のように構成されている。2章では三次元になることで、三角形分割に二次元の場合とは異なるどのような性質が現れるかを紹介する。3章では、一般次元の三角形分割についての、安定集合問題、集合分割問題に基づく定式化を示し、これらの比較検討を行う。4章では、応用上/理論上興味深いいくつかの問題に関連して、最適化の目的関数を考える。5章では、一方の定式化に基づき計算機実験を行い、最適性について考察する。最後に、6章でまとめとともに今後の研究の方向性について述べる。

準備として、いくつかの用語を定義しておく。 $d$ -単体とは、アフィン独立な  $d+1$  点の凸包である  $d$  次元の凸多面体であり、たとえば直線分は1-単体、三角形は2-単体、四面体は3-単体である。また、 $d$ -単体の面とは、 $d$ -単体の端点の部分集合の凸包で構成される  $i$ -単体 ( $i \leq d$ ) を指す。特に、 $i = d-1$  のときはファセットと呼ぶ。 $d$ -単体同士の交差とは、重複部分が非空であり、かつ、少なくとも一方の  $d$ -単体にとって面

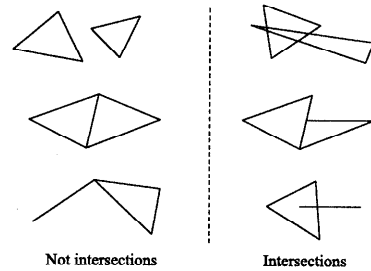


図1 単体同士の交差

Fig.1 Intersections between simplices.

となっていないことを意味する(図1)。本論文で、特に整数計画法での定式化の際に考慮するのは、一般に  $d$ -次元空間上の  $n$  点からなる点配置  $A$  の凸包の  $d$ -単体による分割であるが、簡単のため、以後どの次元においても“三角形分割”という用語を用いる。特に明記しない限り、 $n$  点は一般の位置にある ( $d+1$  点が同一超平面に乗ることはない) と仮定する。

## 2. 三次元での三角形分割

本章では、二次元から三次元になることで起こる三角形分割の性質の変化について紹介する。

### 2.1 三角形分割の要素数

二次元の三角形分割の重要な性質の1つとして、“使用される三角形、辺の数はつねに一定である”というものがあり、3.2節の定式化でも利用している。しかし、三次元においてはこの性質は成り立たない。図2は、二次元、三次元での対角フリップ操作を示したものである。対角フリップは三角形分割での基本的な操作であり、 $d$ 次元空間では、 $d+2$ 個の点の凸包の三角形分割2種類(つねに2種類存在する)を切り替える操作として定義される。二次元の場合は四角形のどちらの対角線を使うか、という選択に対応し、どちらの三角形分割も2つの三角形を使用する。一方で、三次元においては、5点の凸包からなる六面体は四面体を2つ使う場合、3つ使う場合の2通りとなる。つまり、この最も単純な例においても“三角形の数が一定”という性質が成り立っていないことになる。

さらに、隣接する三角形同士の面が共有されていない(単体的複体になっていない)ことを許す、三角形分割より広い定義として dissection があり(図3)、点集合が一般の位置にない場合、両者は一致しない。高次元の凸多面体の三角形による分割を考えると、その要素数の上、下限が三角形分割と dissection とで異なる(興味深い<sup>14)</sup>。

### 2.2 非凸領域の分割可能性

非凸な領域に対処することは、FEM などの応用上

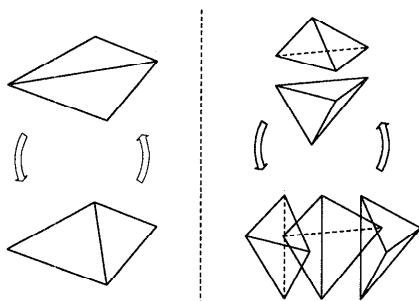


図 2 二、三次元での対角フリップ操作  
Fig.2 Bistellar flips in 2 and 3 dimensions.

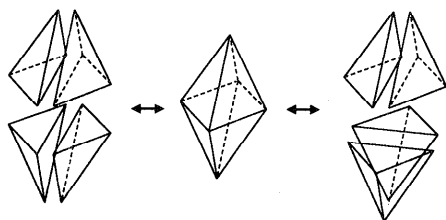


図 3 Dissection が三角形分割と異なる例  
Fig.3 An example where a dissection differs from a triangulation.

重要である。二次元ではどのような非凸領域も三角形分割可能であり、たとえば Delaunay 三角形分割も、非凸制約を取り込んだ“制約つき Delaunay 三角形分割”という形で拡張され、非凸制約のない場合と同様  $O(n \log n)$  で求めることができる<sup>15)</sup>。

三次元においてはすべての非凸領域が三角形分割可能なわけではない。図 4 は Schönhardt の多面体とよばれ、三角柱の上、下面を、側面が凹になるようなねじって得られる形状である。この多面体の 6 つの端点のうち、どの 4 つをとって四面体を構成しても、この四面体はもとの多面体の中に含まれない。つまり、この多面体は、端点のみを使って三角形分割することはできない。分割可能性については、文献 16) に以下の結果が示されている。

定理 1<sup>16)</sup> 三次元 (非凸) 多面体を Steiner 点なしで三角形分割できるかどうかの判断は NP 完全。

定理 2<sup>16)</sup> 任意の正整数  $k$  について、三次元 (非凸) 多面体が最大  $k$  個の Steiner 点を使って三角形分割できるかどうかの判断は NP 困難。

### 2.3 三次元での Delaunay 三角形分割

二次元における Delaunay 三角形分割は、最小角最大化、最大外接円の最小化、最大最小包含円の最小化など、多くの最適性を示すことが知られている。しかし、三次元においては、わずかに最大最小包含円の最小化が成り立つ<sup>17)</sup> のみである。また、二次元におい

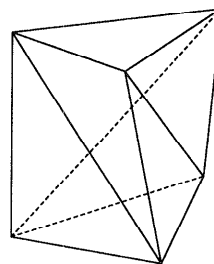


図 4 Schönhardt の多面体  
Fig.4 Schönhardt's polyhedron.

ては  $O(n^2)$  の回数の Delaunay 対角フリップで任意の三角形分割から Delaunay 三角形分割に到達することができるが、三次元では局所解におちいることがある<sup>17)</sup>。これは、三次元での三角形分割を最適化問題としてとらえたとき、局所探索では最適解にたどりつけないことを意味する。

### 3. 整数計画による定式化

前章で見たとおり、三次元では Delaunay 三角形分割はもはや万能ではなくなる。つまり、目的に応じた何らかの基準での良い三角形分割を得る、言い換えれば、三角形分割を最適化することが必要になる。本章では、三角形分割を (一般化) 安定集合問題 (定式化 0, 1), 集合分割問題 (定式化 2) ととらえることにより、整数計画による定式化を示す。特に前者では、集合の要素として三角形自体を対象にする場合 (定式化 0), 低次元の面同士を対象にする場合 (定式化 1) の両方を考える。

$k$ -単体  $i$  に対応する変数を  $x_i^k$  とする。特に、 $d$ -単体に関しては、対応する目的関数を  $c_i$ , 体積を  $v_i$  とし、また、三角形分割の特性ベクトル (各次元が  $d$ -単体に対応し、三角形分割に現れる  $d$ -単体に対応する次元は 1, それ以外は 0 の値をとるベクトル) を考慮するときは太字を用い  $\mathbf{x}^d$  と表記する。

#### 3.1 定式化 0: 安定集合問題に基づく定式化 ( $d$ -単体)

三角形 ( $d$ -単体) の交グラフ  $G(V, E)$  とは、ノードの集合  $V$  に  $d$ -単体に対応し、 $d$ -単体同士が交差する場合、対応するノード間にアークが定義されるグラフである。三角形分割は、 $d$ -単体同士が交差していないため、交グラフでの安定集合 (ノードの部分集合で、対応する誘導部分グラフがアークをまったく含まないもの) に対応する。さらに、いかなる  $d$ -単体を 1 つ追加してもいずれかの  $d$ -単体と交差することになるため、極大である。つまり、三角形分割は交グラフでの極大安定集合を求める問題と見なせる。文献 10) で

は、これの観察に基づき一般次元での三角形分割の列挙アルゴリズムを与えている。ただし、2.2節でも述べたとおり、三次元非凸多面体は必ずしも三角形分割可能ではない。すなわち、三次元以上では極大安定集合が三角形分割にならず、Schönhardtの多面体のような領域が分割されず内部に残ってしまう場合があることを意味する。そこで定式化としては、点集合凸包が充填されていることを  $d$ -単体の体積の和が凸包の体積  $V$  と等しくなることにより保証する必要がある。

$$\text{minimize } \sum_i c_i x_i^d \quad (1)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_i^d &\in \{0, 1\} \\ x_i^d + x_j^d &\leq 1 \text{ (} d\text{-simplex } i \text{ and } d\text{-simplex } j \\ &\text{intersect)} \end{aligned}$$

$$\sum_i v_i x_i^d = V$$

ここで、 $d$ -単体同士の交差を考えることは本質的に冗長さを含んでいる。たとえば、二次元、4点の凸包である四角形の三角形分割では、4つの三角形が存在し、かつ、4つの三角形同士の交差の組がある。一方で、実際の交差の判定は2本の対角線同士の交差のみから導かれる。つまり、 $d$ -単体の面となる低次元の  $i$ -単体 ( $0 \leq i \leq d$ ) を考慮することで定式化はより効率的になる。

### 3.2 定式化1：安定集合問題に基づく定式化 ( $i$ -単体, ( $0 \leq i \leq d$ ))

#### 3.2.1 二次元、辺の安定集合問題

二次元での三角形分割については、文献11)において辺長和最小三角形分割問題を、辺の交グラフ上での最大安定集合問題ととらえることで定式化している。辺長和最小三角形分割は多項式時間で解けるかどうか分かっていない問題として文献18)にも取り上げられている。

二次元の三角形分割では、辺同士は交差しておらず、かつ、極大集合であり、その要素数  $M$  はつねに一定である。よって、辺長和最小三角形分割は、辺の交グラフの極大安定集合のうち、辺の重み  $\tilde{c}_i$  の和の最小のものに対応する<sup>11)</sup>。

$$\text{minimize } \sum_i \tilde{c}_i x_i^1 \quad (2)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_i^1 &\in \{0, 1\} \\ x_i^1 + x_j^1 &\leq 1 \text{ (edge } i \text{ and edge } j \text{ intersect)} \end{aligned}$$

$$\sum_i x_i^1 = M$$

二次元の三角形分割では辺数  $M$  はつねに一定であり、極大な安定集合はつねに最大である。よって、目的関数を変更して最大化問題にすることにより、辺数に関する制約を除くことができ、定式化は純粋な最大安定集合問題となる。以下の定式化において、目的関数がつねに正になるよう、定数  $L$  は辺長和の最大値よりも大きい正の値をとる。

$$\text{maximize } \sum_i (L - \tilde{c}_i) x_i^1 \quad (3)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_i^1 &\in \{0, 1\} \\ x_i^1 + x_j^1 &\leq 1 \text{ (edge } i \text{ and edge } j \text{ intersect)} \end{aligned}$$

#### 3.2.2 一般次元への拡張

式(2)を三次元以上に拡張する。目的関数も、辺ではなく  $d$ -単体に対応させる必要がある。まず、三次元での最も単純な場合である、5点の凸包の対角フリップを考える。図5の束構造(ただし、最小、最大限は省略してある)は  $i$  番目の層が  $(i-1)$ -単体に対応しており、層間のアークは次元の異なる単体同士の包含関係を表している。たとえば、三角形  $(0, 1, 4)$  が存在するためには辺  $(0, 1)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(1, 4)$  が存在する必要がある。これは、各単体に変数を割り当てた(三角形分割に使用する場合1、しない場合0)ときの半順序関係を表す束構造ともとらえることができる。この半順序関係を以後束制約と呼ぶ。

この束自体は、点の配置とは独立である。一方で、交差に関する情報は点の配置によって変化する。図5では、辺  $(0, 4)$  と三角形  $(1, 2, 3)$  が交差している。図6では、点  $(4)$  と四面体  $(0, 1, 2, 3)$  が交差している。

辺  $(0, 4)$  と三角形  $(1, 2, 3)$  が交差しているとき、どちらか一方のみしか三角形分割に現れることができない。二次元の場合と同様、これは、対応する変数の和が1以下になるという制約で表せる。整数計画として定式化する際の必要十分性としては以下のことがいえる。

**命題1**  $d$ -単体の端点のすべては一般の位置にあるとする。このとき、2つの  $d$ -単体が交差する必要十分条件は、それぞれの  $d$ -単体の面である  $k$ -単体と  $j$ -単体で、“ $k+j=d$ となり、かつ、交差する(\*)”ものが存在することである。

**証明:** 十分性は明らか。以下、必要性を示す。2つの  $d$ -単体  $S_1, S_2$  が交差するとき、すべての点が一一般の位置にあるという前提から交差部分  $I$  は  $d$  次元の凸

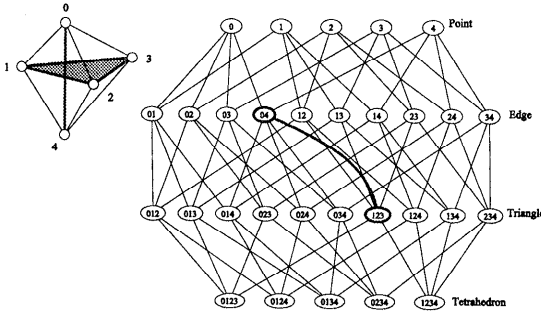


図 5 単体間の包含関係

Fig. 5 Inclusion relations among simplices.

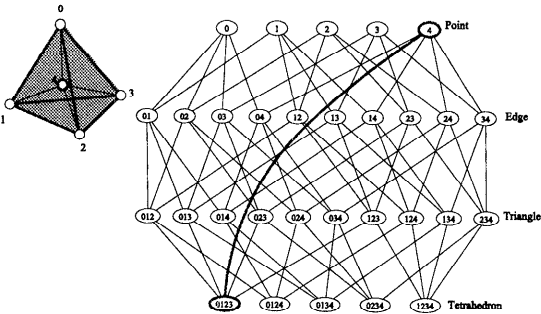


図 6 0-単体と 3-単体の交差

Fig. 6 Intersection of 0-simplex and 3-simplex.

多面体となり、少なくとも  $d+1$  個の端点を持つ。  $S_2$  の端点のうちの一つでも  $S_1$  内部にある場合、この端点 (0-単体) と  $S_1$  は次元の合計が  $d$  であり、かつ交差しているため条件 (\*) を満たす。 よって、以後  $S_1$  内部に  $S_2$  の端点がないとする。  $I$  の端点がすべて  $S_1$  の端点と一致する場合、  $S_1$  は  $S_2$  に完全に含まれることになり、  $S_1$  の端点と  $S_2$  自身は条件 (\*) を満たす。 そこで、  $I$  の少なくとも  $d+1$  個ある端点のうち、  $S_1$  の端点でも  $S_2$  の端点でもない点  $p$  が存在する場合を考える。  $p$  は  $S_1$  の面  $f_1$  と  $S_2$  の面  $f_2$  の交点として定義される。 よって、  $\dim(f_1) + \dim(f_2) = d$  となり、  $f_1$  と  $f_2$  は条件 (\*) を満たす。 □

次元の合計が  $d$  となる単体同士の交差条件と束制約により、互いに交差しない  $d$ -単体の集合が得られる。 この集合が三角形分割となるには、加えて、点集合の凸包が  $d$ -単体で埋め尽くされる必要がある。 この制約を式 (1) と同様に体積に関する制約で表現することにより、  $d$  次元での三角形分割は以下のように定式化される。

$$\text{minimize } \sum_i c_i x_i^d \quad (4)$$

s.t.

$$x_i^k \in \{0, 1\} \quad (0 \leq k \leq d)$$

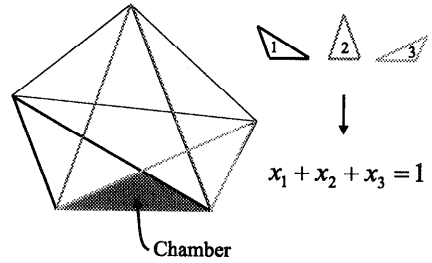


図 7 二次元でのチェンバーの例

Fig. 7 Examples of chambers in 2D.

$$x_i^k + x_j^{d-k} \leq 1 \quad (k\text{-simplex } i \text{ and } (d-k)\text{-simplex } j \text{ intersect, } 0 \leq k \leq d)$$

$$x_i^k - x_j^{k+1} \geq 0 \quad (k\text{-simplex } i \text{ is a facet of } (k+1)\text{-simplex } j, 0 \leq k \leq d-1)$$

$$\sum_i v_i x_i^d = V$$

### 3.3 定式化 2: 集合分割問題に基づく定式化

とりうるすべての三角形を考え、その境界の和集合によって区切られる最小領域をチェンバーと呼ぶ。このとき、三角形分割はチェンバーを要素とする集合分割問題としてとらえることができる。図 7 は二次元の例であり、影のついたチェンバーは 3 つの三角形に含まれるため、  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  という制約が成り立つ。ただし、この制約をすべてのチェンバーについて考える必要はなく、文献 12) には必要十分なチェンバーの選び方が示されている。また、この定式化は、三角形を  $d$ -単体に置き換えることでそのまま一般次元に拡張可能である。

$$\text{minimize } \sum_i c_i x_i^d \quad (5)$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_i^d &\in \{0, 1\} \\ Ax^d &= 1 \\ A_{ij} &= \begin{cases} 1 & d\text{-simplex } j \text{ contains chamber } i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

#### 3.3.1 cocircuit 型制約

チェンバーを扱うには、複雑かつ大量の幾何的な計算を行う必要があり、数値計算の誤差にも影響を受けやすい。そこで、別のタイプの制約を考える。すべての  $(d-1)$ -単体について、以下の制約 (以後、cocircuit 型制約と呼ぶ) が成り立つ<sup>13)</sup>。  $(d-1)$ -単体  $e_k$  により定義される超平面  $\mathcal{H}_{e_k}$  により、空間が正、負の半空間  $\mathcal{H}_{e_k}^+, \mathcal{H}_{e_k}^-$  に分割されるとする。点集合  $\mathcal{A}$  のあ

る点  $a$  と  $e_k$  により構成される  $d$ -単体  $t_i$  を  $\tau \cup \{a\}$  と表すとして、

$$\sum_{t_i = e_k \cup \{a\}, a \in A \cap \tau_{e_k}^+} x_i^d - \sum_{t_i = e_k \cup \{a\}, a \in A \cap \tau_{e_k}^-} x_i^d = \begin{cases} \pm 1 & e_k \text{ is on the convex hull of } \mathcal{A} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

点集合の凸包上の  $(d-1)$ -単体については、この  $(d-1)$ -単体に接しているチェンバーについての集合分割の制約と同一になり、凸包内部の  $(d-1)$ -単体については、両側のチェンバーについての集合分割の制約の差をとったものに相当する。cocircuit 型制約については、文献 13) に以下が示されている。

**定理 3**<sup>13)</sup> 三角形特性凸多面体 (三角形分割を構成する三角形の特性ベクトル全体の凸包) のアフィン包は、すべての「=0」型の cocircuit 型制約と、1つの「=1」型の cocircuit 型制約で定義される。

**定理 4**<sup>13)</sup> 定理 3 の制約のランクは  $\binom{n-1}{d}$ 。

三角形特性凸多面体の次元は  $\binom{n-1}{d+1}$ 。

つまり、チェンバーごとの集合分割の制約のかわりに cocircuit 型制約のみを考えれば十分であり、かつ、 $\binom{n-1}{d}$  次元の基底を成す制約 ( $(d-1)$ -単体の集合) を容易に選ぶことができる。以後、この cocircuit 型制約による定式化を定式化 2 と呼ぶ。

**3.4 定式化の比較**

本節では、定式化自体のサイズ、線形緩和した凸多面体、および拡張性について定式化 0, 1, 2 を比較する。

**3.4.1 定式化のサイズ**

表 1 は行列のサイズの比較である。定式化 2 が最もコンパクトであることが分かる。

**3.4.2 凸多面体の包含関係**

定式化 0 の線形緩和に対応する凸多面体を  $P_0$ 、定式化 1 を線形緩和した凸多面体  $P'_1$  の  $d$ -単体のみに対応する空間への射影を  $P_1$ 、定式化 2 の線形緩和に対応する凸多面体を  $P_2$  とする。以下にこれらの凸多面体の包含関係を示す。集合分割問題の各制約は、安定集合問題の交グラフ上での clique 制約に対応する。つまり、定式化 2 の方がタイトな制約であることが予想されるが、本項では、2つの三角形分割の重ね合わせから微小にずれた状態に着目してこれを証明する。

**命題 2**  $P_0 = P_1$ 。

**証明:** まず、 $P_0 \subseteq P_1$  を示す。 $P_0$  上の任意の点  $p_0$  に対し、 $k$ -単体  $i$  ( $0 \leq k < d$ ) に対応する変数値  $x_i^k$  を

$$x_i^k = \max x_j^{k+1}$$

表 1 定式化のサイズ

Table 1 Size of each formulation.

	#variables	#constraints	#v/c
Formulation-0	$O(n^{d+1})$	$O(n^{2(d+1)})$	$O(1)$
Formulation-1	$O(n^{d+1})$	$O(n^{d+2})$	$O(1)$
Formulation-2	$O(n^{d+1})$	$O(n^d)$	$O(n)$

#variables: total number of variables

#constraints: total number of constraints

#v/c: number of variables in a constraint

( $k$ -simplex  $i$  is a facet of  $(k+1)$ -simplex  $j$ ) として次元を上げた点  $p_1$  は、 $P'_1$  の束制約を満たす。充填制約は定義から満たされている。 $p_1$  に対応する幾何構造において交差している任意の単体の組  $(i, j)$  ( $\dim(i) + \dim(j) = d$ ) について、 $i [j]$  と同じ変数値を持ち  $i [j]$  を面に持つ  $d$ -単体  $d(i) [d(j)]$  が存在し、命題 1 より  $d(i)$  と  $d(j)$  は交差する。 $P_0$  の定義から  $x_{d(i)}^d + x_{d(j)}^d \leq 1$ 。よって、 $x_i^{\dim(i)} + x_j^{\dim(j)} \leq 1$ 。以上から、 $p_1$  はすべての次元の単体間の交差制約も満たし、 $p_1 \in P'_1$ 。すなわち  $P_0 \subseteq P_1$ 。

次に、 $P_1 \subseteq P_0$  を示す。 $P'_1$  上の任意の点  $p_1$  に対応する幾何構造上で、交差している任意の  $d$ -単体の組  $(i, j)$  をとる。命題 1 より、 $i$  の面をなす単体  $f(i)$ 、 $j$  の面をなす単体  $f(j)$  で  $\dim(f(i)) + \dim(f(j)) = d$  となるものが存在する。ここで、 $P_1$  の定義より  $x_i^d \leq x_{f(i)}^d, x_j^d \leq x_{f(j)}^d, x_{f(i)}^d + x_{f(j)}^d \leq 1$ 。よって、 $x_i^d + x_j^d \leq 1$ 。 $p_1$  は充填制約も満たしているため、 $p_1$  の  $d$ -単体に対応する空間への射影は  $P_0$  に含まれる。以上から  $P_1 \subseteq P_0$ 。 □

**補題 1**  $d$ 次元空間の  $d+3$  点の凸包に対し、まったく  $d$ -単体を共有しない2つの三角形分割が存在する。また、この凸包内にありどちらの三角形分割にも属さない  $d$ -単体が存在する。

**証明:** 点の一部が凸包内部にある場合はフリップ操作を考えればよい。以下は  $d+3$  点が凸包  $C$  上にあるとする。以下に、まったく  $d$ -単体を共有しない2つの三角形分割の構成法を示す。

凸包上で隣接していない2点を選び、 $p, q$  とし、 $p$  以外の  $d+2$  点の凸包を  $C_p$  とする。 $C_p$  の2つの三角形分割 (対角フリップに相当する) のうち、 $q$  を端点に持たない  $d$ -単体  $\sigma$  を含むものを  $T_1^p$ 、もう一方を  $T_2^p$  とする。 $C$  の三角形分割は、 $p$  と  $p$  から visible な  $C$  のファセットからなる  $d$ -単体を  $C_p$  の三角形分割に加えることで得られる。こうして  $T_1^p, T_2^p$  から得られる  $C$  の三角形分割を  $T_1, T_2$  とする。

ここで、 $\sigma \cup (C - C_p)$  は  $q$  を除く  $d+2$  点の凸包をなすためフリップが可能であり、その結果得られる三角形分割を  $T'_1$  とする。 $T'_1$  と  $T_2$  は  $d$ -単体を共有

しない. また,  $\sigma$  は  $C$  内部にあり  $T_1^i$  にも  $T_2$  にも属していない. □

**命題 3**  $P_2 \subset P_0$  ( $n \geq d+3$ ).

**証明:** まず,  $P_2 \subseteq P_0$  を示す.

$P_2$  上の任意の点  $p_2$  において, 各チェンバーの属する  $d$ -単体の合計は 1 となるため,  $P_0$  の充填制約を満たす. 交差している任意の  $d$ -単体の組  $(i, j)$  に対し,  $i, j$  の両者に含まれるチェンバーが必ず存在し, このチェンバーでの制約から  $x_i^d + x_j^d \leq 1$  となるため,  $p_2 \in P_0$ . よって,  $P_2 \subseteq P_0$ .

次に,  $P_2 \subset P_0$  ( $n \geq d+3$ ) を示す.  $n$  点のうち  $d+3$  点を選び, その凸包  $C$  について, まったく  $d$ -単体を共有しない 2 つの三角形分割を補題 1 の方法により構成する.  $C$  の三角形分割から  $n$  点の凸包の三角形分割への拡張は容易に実現でき, その結果得られる,  $C$  の内部以外は同一な 2 つの三角形分割を  $T_A, T_B$  とする.  $C$  内にあり  $T_A$  のみに含まれるある  $d$ -単体を  $i$ ,  $C$  内にあり  $T_A, T_B$  どちらにも含まれない, ある  $d$ -単体を  $j$  とする. ここで,  $T_A, T_B$  に対応する三角形特性ベクトルを  $x_A^d, x_B^d$  とし,

$$x_{P_{2b}}^d = \frac{1}{2}x_A^d + \frac{1}{2}x_B^d - \epsilon e_i + \epsilon(v_i/v_j)e_j$$

( $\epsilon \ll \frac{1}{2}$ ,  $e_i[e_j]$  は  $d$ -単体  $i[j]$  に対応する次元の単位ベクトル).

とすると,  $x_{P_{2b}}^d$  は充填制約を満たす. また,  $d+3$  点の凸包内の単体にはすべて  $1/2$  より小さい値を割り当てることが可能であるため, 交差制約を満たす. よって,  $x_{P_{2b}}^d$  に対応する点を  $p_3$  とすると,  $p_3 \in P_0$ . しかし,  $d$ -単体  $j$  内部のチェンバーでは集合分割の制約が成り立たないため  $p_3 \notin P_2$ . 以上から,  $P_2 \subset P_0$ . □

### 3.4.3 拡張性

前項では, 定式化自体のサイズ, 線形緩和した凸多面体, とともに定式化 2 が最もコンパクトであることを示した. この点では, 点集合の凸包の三角形分割の最適化には定式化 2 が最も適しているといえる. しかし, 応用上重要な非凸多面体の三角形分割可能性の検証, 理論上重要な dissection の三角形数最小 (最大) 化といった拡張を考えると, 定式化 2 では対処できない. 一方, 安定集合問題に基づく定式化 0, 1 では, 三角形分割される領域の体積の最大化, という形で非凸多面体の分割可能性に対する知見を得ることができる. また, 交差の条件を緩め, 内点を共有しなければ交差と見なさないことにより, dissection にも容易に対処できる. 以上から, 拡張性の面では, 安定集合問題に基づく定式化が適しているといえる.

### 3.5 すべての点を使う三角形分割

本節で示したどの定式化とも, 凸包内部の点の一部を使わない三角形分割を許している. しかし, 一般に三角形分割という場合, すべての点を使う, という前提をおくことが多い. これを定式化に反映させるには, それぞれ,

**定式化 1** 点 (0-単体) に対応する変数を 1 に固定する.

**定式化 0, 2** 点を内部に含む  $d$ -単体をあらかじめ除去する.

という処理が必要になる. 点を内部に含まない (つまり, 三角形分割に使用可能な)  $d$ -単体の数については, 文献 19) にランダムな点配置での期待値として  $O(n^d)$  となることが示されており, 総数  $\binom{n}{d+1}$  と比較してかなり少ない. 文献 20) では二次元の場合が準乱数を用いた実験により確認されている. 下限は  $\binom{n}{d-1}$  であり<sup>19)</sup>, 上限はすべての点が凸包上にある場合の  $\binom{n}{d+1}$  となる.

### 3.6 切除平面

文献 11) では, 辺長和最小三角形分割の定式化に対し, 切除平面として安定集合問題ではよく知られている clique カット, odd-cycle カットに加え, 三角形分割の特性を利用した凸多面体カットを適用した. 定式化 0, 1 は安定集合問題に基づいており, 同様にこれらの切除平面が線形緩和を切り離しうる. 本節では, これらの切除平面の定式化 2 に対する有効性を検討する.

凸多面体カットは, 二次元の三角形分割では辺数が極大かつ最大安定集合の要素数となり一定である, という特性に基づいている. つまり, 三次元以上では意味をなさないため, ここでは二次元の場合のみを考える. 文献 11) では辺数についての制約として記述しているが, 以下のように三角形数についての制約としてもとらえられる.

**定義 1** 点集合  $\mathcal{V}$ , その凸包を  $C$  とし,  $\mathcal{V}$  のすべての要素を用いた  $C$  の三角形分割の三角形数を  $M$  とする. このとき, 点集合  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{V}, \mathcal{A} \setminus \mathcal{V} \cap C = \emptyset$ ) のすべての点を用いる三角形分割に対応する三角形特性ベクトルを  $x$ , 端点として  $\mathcal{V}$  の要素のみを持つ三角形に対応する次元を  $V$  とすると,

$$\text{凸多面体カット} \quad \sum_{i \in \mathcal{V}} x_i \leq M$$

ここで, 定式化 2 が小数解を持つ例<sup>13)</sup> を見てみる. 二次元正五角形の頂点に対応する点  $1, \dots, 5$  とその中心点  $0$  を入力とするとき, 20 の三角形, 16 の三角形分割が存在する. 20 次元ベクトル  $x \in R^{20}$  の座標と

して  $x_{\{123\}} = x_{\{234\}} = x_{\{345\}} = x_{\{145\}} = x_{\{125\}} = x_{\{013\}} = x_{\{024\}} = x_{\{035\}} - x_{\{014\}} - x_{\{025\}} = \frac{1}{2}$ ,  
 その他は 0 とすると, これは定式化 2 を満たしている.  
 一方, 三角形の交グラフにおいて,  $\frac{1}{2}$  の値を持ち, 点 0 を含まない 5 つの三角形に対応するノードからなる部分グラフはサイズ 5 の odd-cycle となり, 対応する制約

$x_{\{123\}} + x_{\{234\}} + x_{\{345\}} + x_{\{145\}} + x_{\{125\}} \leq 2$   
 は  $x$  を切り離す. つまり, odd-cycle カットについては, 有効な切除平面となりうる事が分かる. 一方,  $\sum_{ijk} x_{ijk} = 5$ , かつ, この点配置では  $M = 5$  となり, 凸多面体カットは冗長である. 実際, 凸多面体カットはつねに冗長となり小数解を切り離すことはないが, この証明はさらなる解析とともに別の論文にて記すこととする.

4. 目的関数

理論上, あるいは応用上興味深いいくつかの目的関数を紹介する.

**三角形数最小化** 2.1 節で述べたとおり, 三次元では三角形分割の要素数は一定ではない. これに関して, 以下の未解決問題がある.

**Open Problem**<sup>21)</sup> 任意の凸多面体を最小数の四面体で分割する多項式時間アルゴリズムは存在するか?

凸多面体内部の点も使って最小数の四面体での三角形分割を求める問題は, 同等以上の複雑度を持つと思われる.

**面積最小化** 二次元での辺長和最小三角形分割問題は多項式時間で解けるのか NP 困難か分かっていない<sup>18)</sup>. この問題の三次元への拡張として, 四面体の面積和最小三角形分割問題が考えられる.

**アスペクトレシオ最大値最小化** FEM などの応用を考えると, 計算誤差の主原因となるのは四面体の平たさである. 外接円半径と内接円半径の比であるアスペクトレシオをなるべく小さく保つ, すなわち, 最大値を最小化する, という指標は実用上重要であろう.

**最大立体角最小化** 二次元での Delaunay 三角形分割は最小角を最大化する. 三次元においては, 角度自体に 2 種類の定義ができる. 面と面とのなす角である面角と, ある端点の周りに十分小さい球面を考えたとき, 四面体によって切り取られる球面の面積の割合で定義される立体角である. これらの角度の“悪さ”の指標としては, 大きい ( $> 1/2 - \epsilon$ ), 小さい ( $< \epsilon$ ) の 2 通りがあり, 図 8 のように相

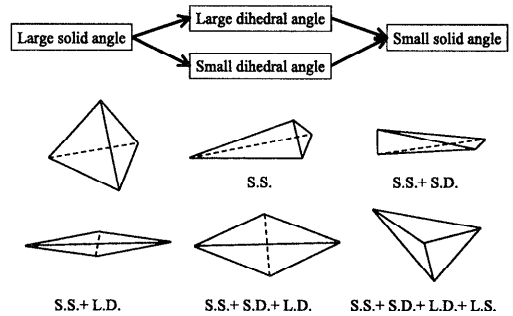


図 8 四面体の悪い角度と分類  
 Fig. 8 Varieties of bad angles of tetrahedra.

関関係がある. たとえば, 小さな面角があれば必ず小さな立体角があり, また, 大きな立体角があればその他のすべての悪い角度がある. どの種類の悪い角度を持つかにより, 四面体は 図 8 下の 6 種類に分類される<sup>22)</sup>. これらの悪い角度を持つ四面体を避けるメッシングアルゴリズムはいくつか存在するが (たとえば, 文献 22)), 点集合を入力とする三角形分割については前例がない. 最大立体角の最小化, 最小立体角の最大化, といった目的関数をとることがこれに対応する.

5. 計算機実験

点集合の凸包の三角形分割の最適化には定式化 2 が適しているという 3.4 節での検証に基づき, 定式化 2 を用いて, 二および三次元のケースに関する計算機実験を行った. 計算機は IBM RS/6000 model 990, 数理計画は IBM Optimization Subroutine Library を用いて解いた. 幾何オブジェクトの処理にはライブラリ CGAL<sup>23)</sup> を, 比較のための Delaunay 三角形分割は, 二次元用にはプログラム Triangle<sup>24)</sup>, 三次元用にはプログラム DeWall<sup>25)</sup> を用いた.

5.1 問題規模と計算時間

一様分布点を入力とし, すべての点を使用する三角形分割での辺長和/面積和最小化問題での, 定式化 2 の規模と計算時間を計測した (表 2, 表 3). 三次元になることで, 解ける問題の規模が著しく小さくなる事が分かる. また, 文献 11) は定式化 1 に近い方法で二次元の問題を解いたが, 小数解が多く, 切除平面や分枝限定法を用いていた. それに対し表 2 では, 分枝限定法に移行するまでもなく, 大規模の問題まで線形緩和した状態で整数解が求まった.

5.2 最適性

すべての点を使用する三次元の三角形分割について, アスペクトレシオの最大値最小化, 四面体数最小化, 四面体の面積和最小化を目的関数として取り上げ,



表 2 辺長和最小化問題（二次元）の規模と計算時間  
Table 2 Size and CPU time of the minimum weight triangulation in 2D.

# of points	10	20	30	40	80	120	160	180
# of rows	84	372	862	1551	6310	14270	25430	32210
# of columns	116	672	1655	3108	14369	33498	60557	77416
IP (sec.)	0.27	1.03	3.14	8.05	122.04	619.03	2050.77	3420.41
Others (sec.)	0.33	1.88	6.21	13.73	121.43	475.71	1234.74	1828.59

IP: CPU time for solving the integer programming problem

Others: CPU time for the rest

表 3 面積和最小化問題（三次元）の規模と計算時間  
Table 3 Size and CPU time of the minimum weight triangulation in 3D.

# of points	10	20	30	40
# of rows	226	2258	8092	19726
# of columns	314	4911	23698	67615
IP (sec.)	0.63	17.89	377.25	11572.23
Others (sec.)	0.84	6.26	18.99	158.29

表 4 三角形分割の最適性（最小値）の比較  
Table 4 Comparison of the optimality of triangulations.

Input		Delaunay	IP (A.R.)	IP (Card.)	IP (Weight)
10 points inside a cube	A.R.	3112.8	<b>79.8</b>	1617.7	452.7
	Card.	19	15	<b>9</b>	12
	Weight	7.894	7.630	6.833	<b>6.503</b>
20 points inside a cube	A.R.	29346.6	<b>488.2</b>	1617.7	3070.3
	Card.	66	56	<b>33</b>	43
	Weight	17.563	18.960	17.500	<b>13.875</b>
20 points on a cylinder	A.R.	10508.7	—	2325.8	7892.3
	Card.	60	—	<b>22</b>	23
	Weight	10.470	—	6.488	<b>6.316</b>

A.R.: maximum Aspect Ratio

Card.: Cardinality

Weight: Sum of the surface area of all the tetrahedra

Delaunay 三角形分割も含めて比較を行った（表 4）。入力としては、立方体内一様分布の 10, 20 点, そして、内部に点を含む四面体が存在しない, つまり, すべての四面体が前処理を通過する例として, 円筒面上に分布する 20 点を使用した。表中の太字は最適値を示している。

Delaunay 三角形分割は相対的に四面体数が多く, また, アスペクトレシオの大きな四面体を含む傾向があることが観察される。つまり, 三次元では様々な指標で最適値から離れており, 二次元の場合のような万能性はない。こうした傾向に関するさらなる知見を得るには, より多様な, そして, より大規模なデータセットを用いての実験が必要である。

円筒面上の 20 点でのアスペクトレシオ最大値最小化は解が求まっていない。これは, 最大値最小化というボトルネックのみの最適化であり, 分枝限定法で探索木が深くなる一方でまったく下限値が変化しない, という現象が起こるためである。ボトルネックの値に

対する二分探索や, 切除平面法が有効と思われる。

## 6. まとめ

本論文では, 三角形分割の整数計画法による定式化を検証し, 三次元になることで三角形分割の特性が大きく変わることを計算機実験を通して検証した。理論上, 応用上興味深いいくつかの目的関数を考察して評価の対象とし, 二次元では万能ととらえられている Delaunay 三角形分割が, 三次元では基準によっては最適値と大きく離れた値をとることが確認された。一般的な傾向を見るには, より多くの実験が必要であろう。

一般次元の三角形分割の定式化として, 既存研究を安定集合問題, 集合分割問題の 2 種類として分類整理するとともに, 前者については一般化安定集合問題へと拡張し効率化した。これらの比較検討の結果, 点集合の凸包の三角形分割を求めるには, 後者に属する cocircuit 型制約による定式化が最も有効である。一方で, 非凸制約, dissection といった拡張に対しては,

安定集合問題による定式化が適している。

今後の課題としては、ボトルネックの最適化に対する二分探索の適用、大規模問題を解くための列生成法、切除平面法の導入、非凸制約への対応がある。非凸制約に関しては、三角形分割可能な領域の最大化により分割可能性に関する解析が可能と思われる。また、本論文での計算機実験は線形計画法に基づいたものだったが、安定集合問題の定式化を用い、グラフに基づくアルゴリズム（たとえば、文献 26）との比較を行うことも興味深い。

### 参 考 文 献

- 1) Halpern, M.: Industrial Requirements and Practices in Finite Element Meshing: A Survey of Trends, *Proc. 6th International Meshing Roundtable*, pp.399-411 (1997).
- 2) 嶋田憲司: 物理モデルによる自動メッシュ分割, シミュレーション, Vol.12, No.1, pp.11-20 (1993).
- 3) Cignoni, P., Montani, C., Puppo, E. and Scopigno, R.: Multiresolution Representation and Visualization of Volume Data, *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, Vol.3, No.4, pp.352-369 (1997).
- 4) 小山田耕二, 宮澤達夫: FEM シミュレーション結果のためのボリュームレンダリングアルゴリズム, 情報処理学会論文誌, Vol.32, No.5, pp.560-569 (1991).
- 5) Shirley, P. and Tuchman, A.: A Polygonal Approximation to Direct Scalar Volume Rendering, *Computer Graphics*, Vol.24, No.5, pp.63-70 (1990).
- 6) Koyamada, K., Uno, S., Doi, A. and Miyazawa, T.: Fast Volume Rendering by Polygonal Approximation, *Journal of Information Processing*, Vol.15, No.4, pp.535-544 (1992).
- 7) Fleischmann, P. and Selberherr, S.: Three-Dimensional Delaunay Mesh Generation Using a Modified Advancing Front Approach, *Proc. 6th International Meshing Roundtable*, pp.267-278 (1997).
- 8) Gritzmann, P. and Klee, V.: Computational Convexity, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Goodman, J.E. and O'Rourke, J. (Eds.), Chapter 26, CRC Press (1997).
- 9) De Loera, J.A.: Computing Minimal and Maximal Triangulations of Convex Polytopes, *working paper* (1998).
- 10) Masada, T., Imai, H. and Imai, K.: Enumeration of Regular Triangulations, *Proc. 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp.224-233 (1996).
- 11) Kyoda, Y., Imai, K., Takeuchi, F. and Tajima, A.: A Branch-and-cut Approach for Minimum Weight Triangulation, *Proc. 8th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC '97)*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.1350, pp.384-393, Springer Verlag (1997).
- 12) Alekseyevskaya, T.V.: Combinatorial Bases in Systems of Simplices and Chambers, *Discrete Mathematics*, Vol.157, pp.15-37 (1996).
- 13) De Loera, J.A., Hosten, S., Santos, F. and Sturmfels, B.: The Polytope of All Triangulations of a Point Configuration, *Documenta Mathematica*, Vol.1, pp.103-119 (1996).
- 14) De Loera, J.A. and Takeuchi, F.: Private communication.
- 15) Bern, M.: Triangulations, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Goodman, J.E. and O'Rourke, J. (Eds.), Chapter 22, CRC Press (1997).
- 16) Ruppert, J. and Seidel, R.: On the Difficulty of Triangulating Three-Dimensional Nonconvex Polyhedra, *Discrete & Computational Geometry*, Vol.7, pp.227-253 (1992).
- 17) Rajan, V.T.: Optimality of the Delaunay Triangulation in  $R^d$ , *Proc. 7th ACM Symp. Computational Geometry*, pp.357-363 (1991).
- 18) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company (1979).
- 19) Bárány, I. and Füredi, Z.: Empty Simplices in Euclidian Spaces, *Canad. Math. Bull.*, Vol.30, pp.436-445 (1987).
- 20) Rote, G. and Tichy, R.F.: Quasi-Monte-Carlo Methods and the Dispersion of Point Sequence, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.23, pp.9-23 (1996).
- 21) Bern, M. and Eppstein, D.: Mesh Generation and Optimal Triangulation, *Computing in Euclidean Geometry*, 2nd edition, Lecture Notes Series on Computing, Vol.4, pp.47-123, World Scientific (1995).
- 22) Bern, M., Chew, P., Eppstein, D. and Ruppert, J.: Dihedral Bounds for Mesh Generation in High Dimensions, *6th ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms*, pp.189-196 (1995).
- 23) CGAL: <http://www.cs.ruu.nl/CGAL/>.
- 24) Triangle: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.research.html>.
- 25) DeWall: <http://miles.cnuce.cur.it/cg/swOnTheWeb.html>.

- 26) Balas, E. and Xue, J.: Minimum Weighted Coloring of Triangulated Graphs, with Application to Maximum Weighted Vertex Packing and Clique Finding in Arbitrary Graphs, *SIAM J. Comput.*, Vol.20, No.2, pp.209-221 (1991).

(平成 10 年 6 月 8 日受付)

(平成 11 年 5 月 7 日採録)



田島 玲 (正会員)

1968 年生。1990 年東京大学工学部航空工学科卒業，1992 年東京大学大学院工学系研究科航空学専攻修士課程修了。同年日本アイ・ピー・エム（株）東京基礎研究所入所，現在に至る。1997 年より東京大学理学部情報科学科社会人博士課程在学中。組合せ最適化，計算幾何学の研究に従事。日本 OR 学会，人工知能学会各会員。



今井 浩 (正会員)

1958 年生。1981 年東京大学工学部計数工学科卒業。1983，1986 年東京大学大学院工学系研究科情報工学専門課程修士，博士課程修了，工学博士取得。1986～1990 年，九州大学工学部情報工学科助教授，1990 年東京大学理学部情報科学科助教授，現在に至る。1987 年冬カナダ McGill 大学訪問副教授。1988 年秋 IBM T. J. Watson 研究所訪問研究員。アルゴリズム論，計算幾何学，最適化，学習理論の研究に従事。電子情報通信学会，日本 OR 学会，ソフトウェア科学会，人工知能学会，数学会，ACM，IEEE 各会員。