5T－1

# ブラウン法の変形

高橋達彦　　平野菅保
日本大学

## 1.はじめに

1変数の4次方程式の解を求める場合、一般的には、ニュートン法等による反復解法や、直接解法としては、フェラリ法(Ferrari:1522-1565)が用いられることが多いが、反復解法よりも、直接解法の方が都合の良いことが多い。その理由としては、次のようなことが挙げられる。

①直接解法の方が、経験的なことであるが、反復解法よりも演算回数が少ない。

②計算時間の予想、すなわち、計算機使用費用の見積もりが容易である。

4次方程式の解法であるフェラリ法では、3次の係数を零にする座標変換を行うので、それによる情報落ちによって、4次方程式に含まれる4つの解の中で絶対値の小さい解は精度が悪くなるという問題がある。ここで述べる、ブラウン法は座標変換を行わず、4次式を2つの2次式の積に直接変形するアルゴリズムである。

現在、用いられているブラウン法では、実際に有限桁で解を求めると、絶対値が桁違いに異なる解を持つ場合には、絶対値の小さな解は、計算途中における桁落ちの誤差によって、相対誤差が大きく入り、正確な値は求められない。

今回、演算によって桁落ちする計算式を桁落ちの起こらない計算式に変更することによって、絶対値の小さな解も、与えられた係数の精度より当然得られる精度で求めることができた。

## 2.ブラウン法

4次方程式(2-1)の左辺を2つの2次式の積に変形するため、

$$X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0=0 \qquad (2\text{-}1)$$

$a_3, a_2, a_1, a_0$:複素係数　X:複素変数

*Modification Of Brown's Method*
*Tatsuhiko TAKAHASHI, Sugayasu HIRANO*
*Nihon University*

4次方程式(2-2′)の左辺を展開して(2-3)を求め、(2-1)と(2-3)のXの次数の等しい項の係数を等しいとすると(2-3′)の4つの式が得られる。

$$(X^2+AX+B+CX+D)(X^2+AX+B-CX-D)=0 \qquad (2\text{-}2')$$

$$(X^2+AX+B)^2-(CX+D)^2=0 \qquad (2\text{-}2)$$

$$X^4+2AX^3+(A^2+2B-C^2)X^2+(2AB-2CD)X+(B^2-D^2)=0 \qquad (2\text{-}3)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2A=a_3 & \rightarrow & A=a_3/2 \\ A^2+2B-C^2=a_2 & \rightarrow & C^2=A^2+2B-a_2 \\ 2AB-2CD=a_1 & \rightarrow & 2CD=2AB-a_1 \\ B^2-D^2=a_0 & \rightarrow & 4D^2=(2B)^2-4a_0 \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}3')$$

(2-3′)の第3式の2乗と、(2-3′)の第2式と第4式の積とは等しいので,

$$(2CD)^2=4C^2D^2$$
$$=(a_3/2)^2(2B)^2-a_3a_1(2B)+a_1^2$$
$$C^2(4D^2)=4C^2D^2$$
$$=\{(a_3/2)^2+(2B)-a_2\}\{(2B)^2-4a_0\}$$

3次方程式(2-4)が得られる。

$$(2B)^3-a_2(2B)^2+(a_3a_1-4a_0)(2B)+a_0(4a_2-a_3^2)-a_1^2=0 \qquad (2\text{-}4)$$

補助方程式である3次方程式(2-4)をカルダノ法を用いて解き、3つの解$B_i$(i=1,2,3)を求め、(2-3′)に代入して次のように$C_i$, $D_i$を求める。

$$D_i=\sqrt{B_i^2-a_0}$$
$$C_i=(a_3B_i-a_1)/(2D_i)$$

あるいは、

$$C_i=\sqrt{(a_3/2)^2+2B_i-a_2}$$
$$D_i=(a_3B_i-a_1)/(2C_i)$$

こうして求めたA, $B_i$, $C_i$, $D_i$を(2-2′)に代入することによって2つの2次式の係数が決まり、これを解くことにより4次方程式の解が得られる。

## 3.絶対値が大きく異なる場合の例

4次方程式(3-1)が含む解の絶対値が桁違いに異なるとして、次の条件を満足させると、

$$|X_1| \gg |X_2| \gg |X_3| \gg |X_4|$$

解と係数の関係から、

$a_3 \fallingdotseq -X_1 \quad a_2 \fallingdotseq X_1X_2 \quad a_1 \fallingdotseq -X_1X_2X_3 \quad a_0 = X_1X_2X_3X_4 \quad (3\text{-}1)$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
-a_2 &\fallingdotseq -X_1X_2 \\
a_3a_1-4a_0 &\fallingdotseq X_1{}^2X_2X_3-4X_1X_2X_3X_4 \fallingdotseq X_1{}^2X_2X_3 \\
a_0(4a_2-a_3{}^2)-a_1{}^2 &\fallingdotseq X_1X_2X_3X_4(4X_1X_2-X_1{}^2)-X_1{}^2X_2{}^2X_3{}^2 \\
&\fallingdotseq -X_1{}^3X_2X_3X_4-X_1{}^2X_2{}^2X_3{}^2 \\
&\fallingdotseq -X_1{}^3X_2X_3X_4 \qquad \because |X_1X_4| \gg |X_2X_3| \\
&\fallingdotseq -X_1{}^2X_2{}^2X_3{}^2 \qquad \because |X_2X_3| \gg |X_1X_4|
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

3次方程式(2-4)の3つの解の中で、絶対値最大の解$B_1$と，2番目に大きい解$B_2$を用いると

$$
\begin{cases} A_1 \fallingdotseq -X_1/2 \\ B_1 \fallingdotseq X_1X_2/2 \\ C_1 \fallingdotseq -X_1/2 \\ D_1 \fallingdotseq X_1X_2/2 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} X^2+(A_1+C_1)X+(B_1+D_1)=0 \\ X^2+(A_1-C_1)X+(B_1-D_1)=0 \\ X^2-X_1X+X_1X_2=0 \\ X^2+\varepsilon_{AC1}X+\varepsilon_{BD1}=0 \end{cases}
\tag{3-3}
$$

$$
\begin{cases} A_2 \fallingdotseq -X_1/2 \\ B_2 \fallingdotseq X_1X_3/2 \\ C_2 \fallingdotseq -X_1/2 \\ D_2 \fallingdotseq X_1X_3/2 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} X^2+(A_2+C_2)X+(B_2+D_2)=0 \\ X^2+(A_2-C_2)X+(B_2-D_2)=0 \\ X^2-X_1X+X_1X_3=0 \\ X^2+\varepsilon_{AC2}X+\varepsilon_{BD2}=0 \end{cases}
\tag{3-4}
$$

3次方程式(2-4)の解$B_3$を用いると、

$|X_1X_4| \gg |X_2X_3|$の場合

$$
\begin{cases} A_3 \fallingdotseq -X_1/2 \\ B_3 \fallingdotseq X_1X_4/2 \\ C_3 \fallingdotseq -X_1/2 \\ D_3 \fallingdotseq X_1X_4/2 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} X^2+(A_3+C_3)X+(B_3+D_3)=0 \\ X^2+(A_3-C_3)X+(B_3-D_3)=0 \\ X^2-X_1X+X_1X_4=0 \\ X^2+\varepsilon_{AC3}X+\varepsilon_{BD3}=0 \end{cases}
\tag{3-5}
$$

$|X_2X_3| \gg |X_1X_4|$の場合

$$
\begin{cases} A_3 \fallingdotseq -X_1/2 \\ B_3 \fallingdotseq X_2X_3/2 \\ C_3 \fallingdotseq X_1/2 \\ D_3 \fallingdotseq X_2X_3/2 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} X^2+(A_3+C_3)X+(B_3+D_3)=0 \\ X^2+(A_3-C_3)X+(B_3-D_3)=0 \\ X^2+\varepsilon_{AC3}X+X_2X_3=0 \\ X^2-X_1X+\varepsilon_{BD3}=0 \end{cases}
\tag{3-6}
$$

$\varepsilon_{AC1}, \varepsilon_{AC2}, \varepsilon_{AC3}, \varepsilon_{BD1}, \varepsilon_{BD2}, \varepsilon_{BD3}$：誤差のみの数値

3次方程式(2-4)の絶対値最大の解$B_1$を用いると(3-3)から解$X_1$、$X_2$が求められ、次に解$B_2$を用いると(3-4)から解$X_1$、$X_3$が求められる。絶対値最小の解$B_3$を用いると、(3-5)の場合は解$X_1$，$X_4$が求められるが、(3-6)の場合は第2式より解$X_1$のみ求まる。

## 4.アルゴリズムの変形

4次方程式(2-1)の係数$a_3$、$a_2$、$a_1$、$a_0$をおよび$A$、$B_i$、$C_i$、$D_i$(i=1,2,3)を用いて4次方程式(2-1)を因数分解して得られる2つの2次式(4-1)の係数を求める。

$$X^4+a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0=(X^2+p_1X+q_1)(X^2+p_2X+q_2)=0 \tag{4-1}$$

① 0次の係数$q_1$,$q_2$を求めるとき、$q_1$あるいは$q_2$が、

$|B_i \pm D_i| < \min(|B_i|, |D_i|)$ならば、

$a_0/(B_i \mp D_i)$ である。

② 1次の係数$p_1$,$p_2$を求めるとき、$p_1$あるいは$p_2$が、

$|A \pm C_i| < \min(|A|, |C_i|)$ならば、

$(-2B_i+a_2)/(A \mp C_i)$ であるが、

分子が、$|-2B_i+a_2| < \min(|2B_i|, |a_2|)$ならば、

更に$\{a_1-(A \mp C_i)a_0/(B_i \mp D_i)\}/(B_i \mp D_i)$

を用いる。

符号の±、∓は、上の符号が$p_1$、$q_1$に用い、下の符号が$p_2$、$q_2$に用いられる。

## 5.計算数値例

以下の計算は4つの解を2倍精度で入力し、解と係数の関係を用いて4次方程式の係数を求め、2倍精度の係数を単精度の係数に丸め、単精度で計算した。

4次方程式の真の解

Z(1)=3.1415926535897930D+05
Z(2)=2.7182818284590450D-03
Z(3)=5.7721566490153280D-04
Z(4)=6.7585198634817520D-19

| 4次方程式の係数 | 3次方程式(補助方程式)の係数 |
|---|---|
| $a_0$= 3.3314560E-19 | $C_0$=-2.4297690E-01 |
| $a_1$=-4.9292680E-01 | $C_1$= 1.5485750E+05 |
| $a_2$= 1.0353110E+03 | $C_2$=-1.0353110E+03 |
| $a_3$= 1.0000000E+00 | $C_3$= 1.0000000E+00 |

1.A,$B_1$,$C_1$,$D_1$の値

| | | | |
|---|---|---|---|
| | A | =-0.1570796E+06 | 0.0000000E+00 |
| | $B_1$ | = 0.9066884E+02 | 0.2962831E-05 |
| | $C_1$ | =-0.1570796E+06 | 0.3050879E-09 |
| | $D_1$ | = 0.9066884E+02 | 0.2962831E-05 |
| 計算解 | $X_1$ | = 0.271828$\underline{1}$E-02 | -0.1886196E-10 |
| | $X_2$ | = 0.6758520E-18 | -0.1739546E-25 |
| | $X_3$ | = 0.3141593E+06 | -0.3239499E-09 |
| | $X_4$ | = 0.5772157E-03 | 0.1886197E-10 |

2.A,$B_2$,$C_2$,$D_2$の値

| | | | |
|---|---|---|---|
| | A | =-0.1570796E+06 | 0.0000000E+00 |
| | $B_2$ | = 0.4269867E+03 | -0.1605687E-04 |
| | $C_2$ | =-0.1570796E+06 | 0.2170624E-10 |
| | $D_2$ | = 0.4269867E+03 | -0.1605687E-04 |
| 計算解 | $X_1$ | = 0.577215$\underline{8}$E-03 | 0.1022212E-09 |
| | $X_2$ | = 0.675851$\underline{9}$E-18 | -0.9427354E-25 |
| | $X_3$ | = 0.3141593E+06 | 0.8051494E-10 |
| | $X_4$ | = 0.271828$\underline{1}$E-02 | -0.1022212E-09 |

3.A,$B_3$,$C_3$,$D_3$の値

| | | | |
|---|---|---|---|
| | A | = -0.1570796E+06 | 0.0000000E+00 |
| | $B_3$ | = 0.7845175E-06 | 0.3865772E-14 |
| | $C_3$ | = 0.1570796E+06 | -0.1548045E-02 |
| | $D_3$ | = 0.7845173E-06 | 0.3865774E-14 |
| 計算解 | $X_1$ | = 0.3141593E+06 | -0.1548045E-02 |
| | $X_2$ | = 0.6758520E-18 | 0.5852012E-33 |
| | $X_3$ | = 0.2718282E-02 | 0.1700563E-10 |
| | $X_4$ | = 0.577215$\underline{6}$E-03 | -0.7667966E-12 |

計算解の下線は誤差の入った桁を示す。

## 6.おわりに

今後の課題としては、さらに2重解を2つ持つ場合についても正確に求められるようにアルゴリズムの改善が必要である。