Plausibility関数に基づく信念様相論理における証拠と推論との関係

1F−4

村井哲也[1)] 宮腰政明[2)] 新保 勝[2)]
[1)]札幌医科大学衛生短期大学部, [2)]北海道大学 工学部

1．まえがき

我々は確率測度の加法性の条件を緩めた様々な測度[4,5]を使って，様相命題論理[1]のモデルを構成し，健全かつ完全な様相論理体系を調べている[2,3]．中でも，Dempster-Shaferの証拠理論[4]における plausibility関数が構成するモデルのクラスに関して様相論理体系$EMNP$が健全かつ完全であり，またその特別な場合であるZadehの可能性測度(cf.[5])および確率測度，Dirac測度が構成するモデルのクラスに関して，それぞれ体系$EMFNP$およびKD，$KD!$が健全かつ完全である．本稿では，このplausbility関数の多様性に着目し，証拠の蓄積，すなわち，各証拠を表わす基本確率割当の結合によって信念が形成されるという観点から信念集合の性質を論じ，いかなる証拠が得られた場合に信念集合が論理をなすかを明らかにする．以下では，メタ言語における否定，連言，選言，含意，同値，全称，存在に対して，それぞれ'not','and','or','⇒','⇔','∀','∃'を使用する．対象言語における論理記号などは文献[1]に従う場合が多い．例えば

$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p$ ⇔ 文pはモデル$\mathcal{M}$の世界αで真である

$\models^{\mathcal{M}} p$ ⇔ $\mathcal{M}$のすべてのαで，$\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p$

$\models_{C} p$ ⇔ Cのすべての$\mathcal{M}$に対し，$\models^{\mathcal{M}} p$

である．Cはモデルのクラスである．論理体系Σに対し，$\vdash_{\Sigma} p$はpがΣの定理であることを表わす．

2．ファジィ測度と様相論理の対応

2．1．様相論理のファジィ測度モデル

信念様相命題論理の言語$\mathcal{L}$を原初記号

$\mathbb{P}$：有限または可算無限個の原子文の集合

0項演算子：⊤(恒真)

単項演算子：¬(否定)，**B**(信念)

2項演算子：∨(選言)

かっこ：(，)

から形成規則

$p \in \mathbb{P} \Rightarrow p \in \mathcal{L}$

$\top \in \mathcal{L}$

$p \in \mathcal{L} \Rightarrow (\neg p) \in \mathcal{L}$

$p \in \mathcal{L} \Rightarrow (\mathbf{B} p) \in \mathcal{L}$

$p, q \in \mathcal{L} \Rightarrow (p \vee q) \in \mathcal{L}$

によって構成する．その他の演算子⊥(恒偽)，∧(連言)，→(含意)，↔(同値)などは通常通り定義する．尚，$\mathcal{L}$の元のうち，信念演算子を含まない文の全体は命題論理の言語となり，$\mathcal{L}_{PL}$で表す．

【定義1】様相論理の有限ファジィ測度モデルとは$<W, \{m_{\alpha}\}_{\alpha \in W}, v>$である．ここで，$W(\neq \phi)$は可能世界の有限集合，vは原子文に対する付値

$v : \mathbb{P} \times W = \{0, 1\}$

である．また，m_{α}は各世界に与えられたファジィ測度[5]である：

$m_{\alpha} : \mathfrak{P}(W) \rightarrow [0, 1]$

ただし，$m_{\alpha}(W) = 1$，$m_{\alpha}(\phi) = 0$

$A \subseteq B \Rightarrow m_{\alpha}(A) \leqq m_{\alpha}(B)$.∎

信念演算子を除く複合文に対し，付値vを通常通り拡張する．各世界に与えたファジィ測度がその世界における信念の判断規準となる点がファジィ測度モデルの特徴である．

【定義2】

(1) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p$ $(p \in \mathbb{P})$ ⇔ $v(p, w) = 1$

(2) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \top$

(3) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \neg p$ ⇔ not $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p$

(4) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \mathbf{B} p$ ⇔: $m_{\alpha}(\| p \|) = 1$

(5) $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p \vee q$ ⇔ $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p$ or $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} q$

ここで，$\| p \| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \mid \models^{\mathcal{M}}_{\alpha} p\}$.∎

2．2．種々のファジィ測度に関して健全かつ完全な様相論理体系

我々はファジィ測度に加え，beliefおよびplausibility関数[4]，可能性測度[5]，確率測度，Dirac測度[5]が構成する有限モデルのクラスに関して，有限ミニマル・モデルに関する結果[1]を援用して健全かつ完全な体系を調べ，表1の結果を得た[2,3]．ここで，belief関数およびplausibility関数はDempster−Shaferの証拠理論で展開されたものであり，基本確率割当

$bpa : \mathfrak{P}(W) \rightarrow [0, 1]$

ただし，$bpa(\phi) = 0$

$\sum_{A \subseteq W} bpa(A) = 1$

から

$Bel(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{A \subseteq B} bpa(B)$

$Pl(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{A \cap B \neq \phi} bpa(B)$

によって定義する．可能性測度ΠはZadehが可能性理論(cf.[1])において展開したもので，実際には次の性質を満たすplausibility関数である：

$\max(\Pi(A), \Pi(B)) = \Pi(A \cup B)$.

確率測度Prは加法性

$A \cap B = \phi \Rightarrow Pr(A) + Pr(B) = Pr(A \cup B)$

に特徴があり，belief関数であり，plausibility関数でもある．Dirac測度δの定義は

$\exists_{1} \alpha \in W,\ \delta(A) = \begin{cases} 1 & (\alpha \in A) \\ 0 & (\alpha \notin A) \end{cases}$

であり，既知である状況を表現する．しかも，前述すべての測度の特別な場合である．

表1からファジィ測度が構成するモデルの諸クラスに関して，体系$EMNP$から体系$KD!$までが対応することが結論できる．ここで，体系$EMNP$は命題論理の公理と推論規則に推論規則

RE．$p \leftrightarrow q \Rightarrow \mathbf{B} p \leftrightarrow \mathbf{B} q$

と公理型

M．$\mathbf{B}(p \wedge q) \rightarrow \mathbf{B} p \wedge \mathbf{B} q$

N．$\mathbf{B} \top$

P．$\neg \mathbf{B} \neg \top$

を追加した体系である．更に，公理型

C．$(\mathbf{B} p \wedge \mathbf{B} q) \rightarrow \mathbf{B}(p \wedge q)$

F．$\mathbf{B}(p \vee q) \rightarrow (\mathbf{B} p \vee \mathbf{B} q)$

表1．ファジィ測度と様相論理体系との関係

モデルを構成する測度	健全かつ完全な体系
ファジィ測度	$EMNP$
plausibility関数	$EMNP$
可能性測度	$EMFNP$
belief関数	$KD(=EMCNP)$
確率測度	$KD(=EMCNP)$
Dirac測度	$KD!$

The Relation between Evidence and Inference in Doxastic Logic Based on Plausibility Functions

T.MURAI[1)], M.MIYAKOSHI[2)] and M.SHIMBO[2)]
1) School of Allied Health Professions, Sapporo Medical College
2) Hokkaido University

をそれぞれ追加すると体系$EMCNP$，$EMFNP$を得る．体系Kは命題論理の公理と推論規則に加えて，推論規則

$$\mathrm{RN}.\ p \Rightarrow \mathbf{B}p$$
$$\mathrm{K}.\ \mathbf{B}(p \to q) \to (\mathbf{B}p \to \mathbf{B}q)$$

を追加した体系である．更に，公理型

$$\mathrm{D}.\ \mathbf{B}p \to \neg\mathbf{B}\neg p$$
$$\mathrm{D!}.\ \neg\mathbf{B}\neg p \leftrightarrow \mathbf{B}p$$

をそれぞれ追加すると体系KD，$KD!$を得る．尚，体系$EMCN$では体系Kの推論規則と公理が成立し，逆もまた成り立つ．すなわち，論理(定理の集合)として$EMCN$とKとは同一である．また，体系Kでは公理型PとDとは同値であるため，体系$EMCNP$とKDが同一となる．尚，意味論の観点(cf.[#])からは，体系E…はミニマル・モデルのクラスに対応する．ミニマル・モデルはある条件を満たすときクリプキ・モデルと同値になり，対応する体系E…と同一な体系K…が存在する．

3．証拠に基づく信念集合の性質

ファジィ測度の中でも，Dempster-Shaferの測度[5]，すなわち，belief関数とplausibility関数と信念様相論理との関係は重要である．なぜなら，両測度は証拠を表現する基本確率割当から構成されるため，測度モデルを介して証拠の蓄積による信念形成の過程を形式的に表現できるからである．特に，plausibility関数は可能性測度および確率測度，Dirac測度を包含するから，表1に現われるすべての体系に対応し，plausibility関数の多様性を示すと考えられる．本章では，証拠を表す基本確率割当に対して，世界αにおける信念集合

$$\mathcal{B}_{\alpha} = \{p \mid \models^{M}_{\alpha} \mathbf{B}p\} \cap \mathcal{L}_{PL}$$

の性質を論じる．尚，本稿では信念集合の対象を命題論理の文に限定し，自己内省は扱わない．

3．1．何も証拠がない場合

最も単純な証拠は何も証拠がないことを表す証拠であり，次の基本確率割当で表現される：

$$\mathrm{bpa}_{\alpha}(A) = \begin{cases} 1 & A = W \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

このとき，明らかに

$$\mathrm{Pl}_{\alpha}(\{\beta\}) = 1 \quad (\forall \beta \in W)$$

であるから，任意の文$p \in \mathcal{L}_{PL}$に対して

$$\|p\| \neq \phi \Leftrightarrow \models^{M}_{\alpha} \mathbf{B}p$$

が成り立つ．すなわち，

$$\mathcal{B}_{\alpha} = \{p \mid \exists\beta,\ \models^{M}_{\beta} p\}$$

であり，無矛盾な文はすべて信念の対象となり，

$$\exists p \in \mathcal{L}_{PL},\ p \in \mathcal{B}_{\alpha} \text{ and } \neg p \in \mathcal{B}_{\alpha}$$

であり得る．一方，$p \wedge \neg p$は矛盾文であり，それが信念の対象にならないことは$\mathrm{Pl}_{\alpha}(\phi) = 0$が保証する．すなわち，信念集合$\mathcal{B}_{\alpha}$は連言に対して閉じていない．

3．2．一般のplausibility関数の場合

一般に，plausibility関数は体系$EMNP$の演算子を構成し，信念集合はその推論規則および各公理型に対応して，次の性質を持つ：

(e) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ and $p \leftrightarrow q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow q \in \mathcal{B}_{\alpha}$
(m) $p \wedge q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ and $q \in \mathcal{B}_{\alpha}$
　($p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ or $q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \vee q \in \mathcal{B}_{\alpha}$)
(n) $p \leftrightarrow \top \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \in \mathcal{B}_{\alpha}$
(p) $p \leftrightarrow \bot \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \notin \mathcal{B}_{\alpha}$

公理型C，K，Dなどは一般に成立しないので

(c) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ and $q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \wedge q \in \mathcal{B}_{\alpha}$
(f) $p \vee q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ or $q \in \mathcal{B}_{\alpha}$
(k) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}$ and $p \to q \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow q \in \mathcal{B}_{\alpha}$
(d) $p \in \mathcal{B}_{\alpha} \Rightarrow \neg p \notin \mathcal{B}_{\alpha}$

は成り立たない．(n)によって，$\mathcal{B}_{\alpha}$はすべての恒真式を含む．しかし，(k)の不成立により，$\mathcal{B}_{\alpha}$がモダス・ポネンスに関して閉じておらず，$\mathcal{B}_{\alpha}$は論理を成さないことがわかる．また，(c)および(d)の不成立から，連言に関して閉じていないこと，および互いに矛盾する文を同時に信じ得ることが帰結する．

3．3．信念集合の論理への分解

前節で論じたように，一般に，plausibility関数に基づく信念集合$\mathcal{B}_{\alpha}$は論理の集合の和集合として表現できる．すなわち，文献[3]で示したように，有限集合W上のplausibility関数の値が1である集合

$$\{A \mid \mathrm{Pl}_{\alpha}(A) = 1\}$$

は有限個の極小元

$$V_1, \cdots, V_m \ (m \geqq 1)$$

を持つ．したがって，Pl_{α}の単調性から

$$\{A \mid \mathrm{Pl}_{\alpha}(A) = 1\}$$
$$= \{A \mid V_1 \subseteq A\} \cup \cdots \cup \{A \mid V_m \subseteq A\}$$

と分解できる．分解された各集合に対応する信念の集合を$\mathcal{B}_{\alpha}^{k}$とおく：

$$\mathcal{B}_{\alpha}^{k} = \{p \in \mathcal{L}_{PL} \mid V_k \subseteq \|p\|\} \quad (1 \leq k \leq m)$$

このとき，明らかに

$$\mathcal{B}_{\alpha} = \mathcal{B}_{\alpha}^{1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\alpha}^{m}$$

であり，また，各$\mathcal{B}_{\alpha}^{k}$では

$$V_k \subseteq A \text{ and } V_k \subseteq B \Rightarrow V_k \subseteq A \cap B$$

から

(c) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$ and $q \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k} \Rightarrow p \wedge q \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$

が成り立つ．よって，$\|p\| \cap \|p \to q\| = \|q\|$より

(k) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$ and $p \to q \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k} \Rightarrow q \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$

となり

(n) $p \leftrightarrow \top \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k} \Rightarrow p \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$

と併せて，各$\mathcal{B}_{\alpha}^{k}$は論理をなす．また，(c)と

(p) $p \leftrightarrow \bot \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k} \Rightarrow p \notin \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$

から

(d) $p \in \mathcal{B}_{\alpha}^{k} \Rightarrow \neg p \notin \mathcal{B}_{\alpha}^{k}$

を得るから，各$\mathcal{B}_{\alpha}^{k}$は互いに矛盾する文を同時に含まない．

4．あとがき

本稿では，plausibilty関数が対応する様相論理体系の多様性に着目し，plausibility関数が構成する信念集合はある文pに対して，pと¬pを同時に信じながらも，p∧¬pは絶対に信じないという性質を持ち，一般には論理を成さず，論理を成す集合の和集合として表現できることを示した．この性質は，すべての帰結を信じることなしに，互いに矛盾した文を信念の対象とできる人間の能力を表現(あるいは近似)すると考えられ，通常の古典論理の意味での合理性を持たない人間の信念集合はそれでもなお，plausibility関数が対応する弱い様相論理体系$EMNP$が与える最低限の合理性を持つと解釈できる．

文　献

[1] B.F.Chellas, Modal Logic: an Introduction. Cambridge University Press, 1980.

[2] 村井哲也,宮腰政明,新保　勝，種々のファジィ測度の族が決定する様相論理体系．第８回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，1992, 29-32.

[3] T.Murai, M.Miyakoshi, M.Shimbo, Measure-Based Semantics for Modal Logic. *Fuzzy Logic: States of the Art* (ed.by R.Lowen), Kluwer Academic, 1992, to appear.

[4] G.Shafer, A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.

[5] 菅野道夫,室伏俊明，ファジィ測度論入門[1]．日本ファジィ学会誌，2(1990), 174-181.