ブール加法形式の不変量について

3X−5

巽 久行[+]　荒木 智行[++]　向殿 政男[++]　木澤 誠[+]

[+]神奈川工科大学　[++]明治大学

1．まえがき

2値論理関数は，通常ブール式（論理式）で表現されており，ブール式は一般に加法形式に展開されて使用される場合が多い。ブール加法形式の数を求める良いアルゴリズムは，今のところ知られていない。本論文は，文献[1]で与えた数え上げに有効な同値類の，省略されていた不変量の証明を示す。ブール加法形式の数のみを問題にする場合，この不変量により2値論理関数のＮＰ同値類より類の数が少ないＮＰ同値類で数え上げることが出来る。

2．諸性質

最初に，ブール加法形式の定義と諸性質を示す。これらは文献[1]の記述と重複するが，必要最小限にとどめて列挙する。

各変数x_i($i=1,\cdots,n$)と論理演算ＡＮＤ(・)，ＯＲ(∨)及びＮＯＴ(−)との結合で表現される論理式を，ブール式という。変数x_iは{0，1}の値を取るので，ブール式は

$$f : B^n \rightarrow B \qquad 但し, B=\{0,1\}$$

なるある2値論理関数ｆを表現している。変数x_iとその否定$\overline{x_i}$をリテラルといい，幾つかのリテラルをある変数について肯定，否定が同時に現れないように論理積(ＡＮＤ)で結合した論理式を単積項という。便宜上，変数が1つも存在しないものも1つの単積項(これを1と記す)とする。α_i, α_j（但し，$i \neq j$）を2つの単積項とするとき，

$$\alpha_i \subseteq \alpha_j \Leftrightarrow \alpha_j の文字は全て\alpha_i に現れる$$

で単積項同志の包含関係が定義される。これよりｎ変数の全ての単積項からなる集合(これをΦ_nと記す)は，包含関係⊆に関して半順序集合を成す。

［定義2．1］

ｆが単積項の論理和(ＯＲ)から構成されるブール式

$f=\alpha_1 \vee \cdots\cdots \vee \alpha_m$ において，

$$\forall i, j \ (但し, i \neq j); \quad \alpha_i \not\subseteq \alpha_j$$

なるとき，ｆはブール加法形式で表現されているという。但し，単積項が1つも存在しないものも1つのブール加法形式（これを0と記す）とする。

任意の2値論理関数ｆに対して，それを表現するブール加法形式の数は，一般に複数個存在する。今，$V=\{0, 1/2, 1\}$として，Ｖに次のような半順序関係≼を定義する。

［定義2．2］

ａ，ｂをＶの元とするとき，

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b \leq 1/2 \quad または \quad 1/2 \leq b \leq a$$

この関係を次のように，Ｖのｎ個の直積V^nまで拡張定義する。

［定義2．3］

$a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)$ をV^nの元とするとき，

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow \forall i; \quad a_i \preccurlyeq b_i$$

これより集合V^nは，半順序関係≼に関して半順序集合を成す。ここでV^nとΦ_nとの間に，次のような1対1対応が存在する。

［定義2．4］

$a=(a_1,\cdots,a_n) \in V^n$と，$\alpha = x_1^{a1} \cdot \cdots \cdot x_n^{an} \in \Phi_n$ とは，次のとき互いに対応している。

$$a_i = 1 \Leftrightarrow x_i^{ai} = x_i, \qquad a_i = 0 \Leftrightarrow x_i^{ai} = \overline{x_i}$$
$$a_i = 1/2 \Leftrightarrow x_i^{ai} = 1$$

この対応により，単積項についての命題は全て半順序集合V^nの元についての命題として解釈出来る。

［定義2．5］

半順序集合V^nの元$a_1,\cdots,a_m$ が互いに比較不可能，即ち

$$\forall i, j \ (但し, i \neq j); \quad a_i \not\preccurlyeq a_j$$

なるとき，集合$\{a_1,\cdots,a_m\}$はV^nにおける反鎖であるという。但し，空集合も1つの反鎖とする。

ある2値論理関数ｆが包含する単積項を，ｆの内項という。ｆの全ての内項に対応するV^nの要素からなる集合を，$V^n(f)$と記す。$V^n(f)$は，半順序関係≼に関して半順序集合を成し，その極大元はｆの主項に対応する元に等しい。$V^n(f)$は，その極大元の集合(これを$\partial V^n(f)$と記す）により一意に定まる。V^nのうち，1/2の個数がｋ個のものから成る集合を，V_k^nとする。特に$V_0^n = B^n$である。$V_k^n(f)$の要素についても，同様に定義する。またV^nの任意の元ａに現れる全ての1/2を，0または1で置き換えて得られるB^nの元からなる集合を，a^*で表わす。即ち，

$a^* = \{b \in B^n \mid b \preccurlyeq a \in V^n\}$ である。

［定理2．1］

ある2値論理関数ｆを表現するブール加法形式と，

$$a_1^* \cup \cdots\cdots \cup a_m^* = V_0^n(f) \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす$V^n(f)$の反鎖$\{a_1,\cdots,a_m\}$とは1対1に対応する。

（証明）　$\alpha_1 \vee \cdots\cdots \vee \alpha_m$を，ｆを表現するｎ変数の1つのブール加法形式とする。$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ に対応する$V^n(f)$の要素を各々$a_1,\cdots,a_m$とすると，$\alpha_i \not\subseteq \alpha_j$より$a_i \not\preccurlyeq a_j$となるので集合$\{a_1,\cdots,a_m\}$は$V^n(f)$の1つの反鎖である。さらにこの反鎖に対して集合$\{a_1^*,\cdots,a_m^*\}$はｆを表現しているから①が成立する。逆も同様である。　（証明終）

以上により，ある2値論理関数ｆを表現するブール加法形式の数を求める問題は，$V^n(f)$の反鎖$\{a_1,\cdots,a_m\}$のうち，それらが包含するV_0^nの元の集合が $V_0^n(f)=\{b \in B^n \mid f(b)=1\}$と一致するものを求める問題に帰着された。更に，$V^n(f)$のうち，$V_0^n$の元からなる集合を無視した半順序集合を$V_{\bar{0}}^n(f)$とすると，$V^n(f)$の反鎖と$V_{\bar{0}}^n(f)$の反鎖との対応は1対1であるから，こ

On Invariants of Boolean Disjunctive Form
Hisayuki TATSUMI[+]　Tomoyuki ARAKI[++]
Masao MUKAIDONO[++]　Makoto KIZAWA[+]
+ Kanagawa Institute of Technology　++ Meiji University

の問題は次のように若干改良できる。

［定理２．２］

ある２値論理関数ｆを表現するブール加法形式の数は，半順序集合$V_{\overline{0}}^{n}(f)$に存在する反鎖の数に等しい。　（証明略）

これよりブール加法形式の数を数え上げる問題は，半順序集合の反鎖の数を数え上げる問題に帰着された。ｎ変数のブール加法形式の数を求めるには，ある２値論理関数ｆを表現するブール加法形式の数（以下，$|BD(f)|$と記す）を求める手続きを，全ての２値論理関数に対して適用すればよい。しかし次の定理により，数え上げの対象は限定される。

［定理２．３］

２値論理関数ｆを表現するブール加法形式の数$|BD(f)|$は，変数の否定及び変数の置換に関して不変である。

（証明）　半順序集合$V^{n}(f)$は，変数の否定及び変数の置換に対して同型である。よって，この半順序集合の反鎖の数は等しい。　（証明終）

この定理より，２値論理関数の集合を変数の否定(Negation)及び変数の置換(Permutation)に関する同値類(これをＮＰ同値類と呼ぶ)に分類して，各同値類の代表関数に対してのみ，それを表現するブール加法形式の数を数え上げればよい。しかしながらブール加法形式の数のみを問題にする場合には，半順序集合$V^{n}(f)$上のＮＰ同型(以下，便宜的に$\simeq_{NP}$と記す）は条件として強すぎる。そこで以下のように考えて，数え上げの対象とするＮＰ同値類を減少させる。

定理２．２より，ブール加法形式の数$|BD(f)|$は，半順序集合$V_{\overline{0}}^{n}(f)$から求まる。ここで$V_{\overline{0}}^{n}(f)$は，その極大元の集合$\partial V_{\overline{0}}^{n}(f)$により一意に定まり，これは，

$$\partial V_{\overline{0}}^{n}(f)=\partial V_{\overline{0,1}}^{n}(f)\cup\partial V_{1}^{n}(f)$$

により一意に分割される。ここで$\partial V_{\overline{0,1}}^{n}(f)$及び$\partial V_{1}^{n}(f)$は，各々要素1/2が２個以上及び１つのみからなる$V^{n}(f)$の極大元の集合を示す。そこで２値論理関数ｆを，存在する項が全て主項で，その主項のリテラル数がn-2個以下からなる２値論理関数を$f_{\overline{0,1}}$，n-1個のみからなる２値論理関数をf_{1}で表現すれば，以下の式で計算出来る。

［定理２．４］

$$|BD(f)|=|BD(f_{\overline{0,1}})|\times 2^{|f_1|}$$

但し，$|f_{1}|$はf_{1}の主項の数を表わす。　（証明略）

この定理より，半順序集合$V_{\overline{0,1}}^{n}(f_{\overline{0,1}})$のＮＰ同値類の代表関数に対するブール加法形式の数$|BD(f_{\overline{0,1}})|$のみを数え上げればよい。

３．不変量

ある２値論理関数$f_{\overline{0,1}}$が与えられたとき，それがどのＮＰ同値類に属するかを判定するのは手数を要する。$f_{\overline{0,1}}$から簡単に，一意に決定できるような指標(いわゆる不変量)が存在すれば，ブール加法形式の数を求めることは極めて容易となる。我々は，$f_{\overline{0,1}}$に関するＮＰ同値類の不変量(以下，$INV(f_{\overline{0,1}})$と記す)を次のように定義する。

［定義３．１］

$f_{\overline{0,1}}$の主項のうち，リテラル数がn-k個(但し，2≦k≦n)のものを

$$\alpha_{1}=x_{1}^{a11}\cdot\cdots\cdot x_{n}^{a1n},\ \cdots,\ \alpha_{m}=x_{1}^{am1}\cdot\cdots\cdot x_{n}^{amn}$$

とし，それに対応する$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$の元をそれぞれ

$$a_{1}=(a_{11},\cdots,a_{1n}),\ \cdots,\ a_{m}=(a_{m1},\cdots,a_{mn})$$

とする。この主項の個数$|\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})|$を$p_{k}$とする。

また，a_{i}(但し，1≦i≦m）のｊ桁目のみの要素からなるベクトル$(a_{1j},\cdots,a_{mj})$(但し，1≦j≦n）のうち，要素1/2の個数をq_{k}^{j}とする。ここで数列$q_{k}^{1},\cdots,q_{k}^{n}$（以下，$\{q_{k}\}$と記す）がｋに対して辞書式順序（$l<m$ならば$q_{k}^{l}>q_{k}^{m}$，または$q_{k}^{l}=q_{k}^{m}$かつ$q_{h}^{l}>q_{h}^{m}$，(但し，h<kとする)）になるように，変数の順序を置き換えて得られる数列の組$\langle p_{k}|\{q_{k}\}\rangle$(但し，n≧k≧2)を，$INV(f_{\overline{0,1}})$と記す。

実際にこれが不変量になることを，以下に示す。

［定理３．１］

$$f_{\overline{0,1}}\simeq_{NP}g_{\overline{0,1}}\quad\rightleftarrows\quad INV(f_{\overline{0,1}})=INV(g_{\overline{0,1}})$$

（証明）　任意のベクトルａに対して，要素ａが1/2に等しい個数を$|a|_{1/2}$と記す。また，ａの要素a_{i}に対する否定変換をδ，ａの要素a_{i}とa_{j}に対する置換（互換）をσと記す。この変換の組(δ，σ)をτと記すと，ＮＰ同型写像φで行われるＮＰ変換Ｔに対して，τ∈Ｔである。

(⇒)　$f_{\overline{0,1}}\simeq_{NP}g_{\overline{0,1}}$ならば$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$と$\partial V_{k}^{n}(g_{\overline{0,1}})$との間に，あるＮＰ同型写像φが存在する。いま$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$の任意の元ａに対して変換δ及びσを行うと，

$$|\delta(a)|_{1/2}=|a|_{1/2}\ ,\ |\sigma(a)|_{1/2}=|a|_{1/2}$$

より，$|\tau(a)|_{1/2}=|a|_{1/2}$である。よって，変換Ｔに関して$p_{k}$は等しい。またａのｊ桁目の要素からなるベクトルｑに対して，

$$|\delta(q)|_{1/2}=|q|_{1/2}\ ,\ |\sigma(q)|_{1/2}=|q|_{1/2}$$

より，$|\tau(q)|_{1/2}=|q|_{1/2}$である。よって変換Ｔに関して数列$\{q_{k}\}$の辞書式順序は等しい。

(⇐)　$INV(f_{\overline{0,1}})=INV(g_{\overline{0,1}})$ならば不変量の定義より，$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$と$\partial V_{k}^{n}(g_{\overline{0,1}})$との間に，ある写像φが存在する。ａを$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$の元とすると，$|\tau(a)|_{1/2}=|a|_{1/2}$より，$\tau(a)\in\partial V_{k}^{n}(g_{\overline{0,1}})$。よってφは上への写像である。

またｂ≼ａなる元ｂに対して，$\delta(b)\preccurlyeq\delta(a)$，$\sigma(b)\preccurlyeq\sigma(a)$より，$\tau(b)\preccurlyeq\tau(a)$である。よってφはＮＰ準同型写像である。同様に，$\phi^{-1}$もＮＰ準同型写像である。

更に，$c(\neq a)$を$\partial V_{k}^{n}(f_{\overline{0,1}})$の元とすると，$\delta(c)\neq\delta(a)$，$\sigma(c)\neq\sigma(a)$より，$\tau(c)\neq\tau(a)$である。よってφは１対１対応である。従ってφはＮＰ同型写像である。　（証明終）

４．あとがき

２値論理関数ｆのＮＰ同値類については，不変量のアルゴリズム及び類の数を求める式が既に示されている[2]。これに対して，$f_{\overline{0,1}}$のＮＰ同値類の類の数を求める問題は今後の課題であるが，かなり困難であると予想される。

参考文献

[1] 巽，向殿：ブール加法形式の数え上げ問題，信学論(D)，Vol.J66-D，No.10，pp1201-1208 (1983).

[2] Harrison.M.A : Introduction to switching and automata theory, McGraw-Hill, (1965).