2Q−8

充足可能性問題に対するJeroslowの手法の拡張 †

山本 雅人 大柳 俊夫 大内 東

北海道大学

1 はじめに

第一階述語論理における充足可能性問題は，定理の自動証明などにおける基本的な問題の一つである．この充足可能性問題を解く手法として，Robinson の導出原理に基づくものが数多く提案されている [1,2]．これに対して Jeroslow は，第一階述語論理の充足可能性問題を命題論理の充足可能性問題を利用して解く新しい手法を提案した [3]．その手法は，関数記号を含まない場合にしか適用できないという欠点を持っている．本稿では，導出原理の考え方を取り入れ，この手法を関数記号を含む場合へ拡張する．その際，扱う論理式を節形式に限定するが，このことで一般性が失なわれることはない．また，この手法を用いた推論システム実現における問題点などについても述べる．

2 諸定義

第一階述語論理において，任意の論理式は冠頭標準形に変換することができる．また，冠頭標準形に変換された論理式の母式は，節形式(連言標準形)に変換し，Skolem 関数の導入をよって，存在記号 ∃ をなくすことができる．このため，第一階述語論理における充足可能性問題は，すべての変数が全称記号で束縛されている節形式の論理式 $(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ で表現されていると考えても一般性が失われることはない．ここで，$(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ は $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)B(x_1,\cdots,x_n)$ を表し，$B(\vec{x})$ は限定記号を含まない節形式の論理式である．ただし，$\vec{H}$ はその成分が Herbrand 空間の要素であるようなベクトルの集合である．$(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ の充足可能性は，すべての変数に対して Herbrand 空間 H の要素の代入のすべての組み合わせを考えることで調べることができる．

定義 1 (部分例示)
論理式の中の変数に対して，Herbrand 空間の要素を代入することを部分例示(partial instantiation)という．本稿では，以下のような部分例示の連言を扱う．

$$B_1 \wedge \cdots \wedge B_t \tag{1}$$

ここで，B_i $(1 \le i \le t)$ は変数ベクトル $\vec{x}$ の中のある成分に Herbrand 空間の要素を代入することによって得られる．ただし，$B_1 = B(\vec{x})$ である．

定義 2 (改良)
(1) 式中の論理式 B_i $(1 \le i \le t)$ において，B_iで例示されていない変数をさらに例示した論理式$\bar{B}_i$を B_iの改良(refinement)という．

定義 3 (被覆)
(1) 式中の B_iにおいて，その中のすべての変数に H の中の定数を代入することによって，$B(\vec{h})$ が得られるとき，B_i は $\vec{h} \in \vec{H}$を被覆する(cover)という．またそのとき，B_iの改良 B_j $(i < j \le t)$ のすべてが $\vec{h}$ を被覆しないとき，B_iは $\vec{h} \in \vec{H}$を直接被覆する(direct cover)という．

定義 4 (変種)
複数の述語記号が変数のみ違うとき，それらの述語記号は互いに変種(variant)であるという．

定義 5 (変種独立割当て)
ある論理式において，互いに変種である述語記号にすべて同じ真偽を割当てる真理値の割当てを変種独立割当て(variant independent valuation)という．

定義 6 (妨害)
(1) 式を真とする真理値の割当てが存在するとする．このとき，以下の条件をすべて満たす二つの述語記号 $R \in B_i, S \in B_j$が存在すれば，その割当ては妨害されている(blocked)といわれる．ただし，$1 \le i \le j \le t$ である．また，Rと Sは障害物(blockage)と呼ばれる．

(*a*) Rと Sは反対の真理値が割当てられている．

(*b*) B_i, B_jの中で Rと Sを含む 2 つのリテラルが反対の符号をもつ．

(*c*) B_i, B_jにそれぞれ直接被覆される $\vec{h}_1 \in \vec{H}, \vec{h}_2 \in \vec{H}$が存在する．

(*d*) $B(\vec{x})$ に (*b*) の $\vec{h}_1, \vec{h}_2$を例示したとき，Rと Sは同じになる．

3 定理

次節で示すアルゴリズムで用いている 2 つの主要定理を以下に示す．

定理 1
$B_1 \wedge \cdots \wedge B_t$ を真とする変種独立割当てが存在しないならば，$(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ は充足不能である．

定理 2
$B_1 \wedge \cdots \wedge B_t$ を真とする変種独立割当てが妨害されていなければ，$(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ は充足可能である．

---

† Extension of Jeroslow's method for satisfiability problem
Masahito Yamamoto, Toshio Ohyanagi and Azuma Ohuchi
Hokkaido University

4 アルゴリズム

$(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ の充足可能性を求めるアルゴリズムは以下のようになる.

1: **begin**

2: $t=1, B_1=B(\vec{x})$ とする.

3: **while** 充足可能性問題が解けていない **do**

4: **begin**

5: **if** $B_1\wedge\cdots\wedge B_t$ を真とする変種独立割当てが存在しない **then** 論理式 $(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ は充足不能である (終了).

6: **if** $B_1\wedge\cdots\wedge B_t$ を真とする変種独立割当てが妨害されていない **then** 論理式 $(\forall\vec{x})B(\vec{x})$ は充足可能である (終了).

7: 部分例示を拡張する.

8: **end**

9: **end;**

部分例示の拡張を行う際には, 必ず障害物の組 $R\in B_i$ と $S\in B_j$ が存在する. そこで, これらから以下のように部分例示の拡張を行う.

1: **begin**

2: R と S の間の最汎単一化作用素 σ を求める.

3: **if** $B_i=B_j$ **then** $B_{t+1}=B_i\sigma$, $t=t+1$ とする.

4: **else begin**

5: **if** R が σ によって変化する **then** $B_{t+1}=B_i\sigma$, $t=t+1$ とする.

6: **if** S が σ によって変化する **then** $B_{t+1}=B_j\sigma$, $t=t+1$ とする.

7: **end**

8: **end;**

5 Jeroslow の手法の拡張点

Jeroslow は関数記号を含まない第一階述語論理式について議論している. その際, $B(\vec{x})$ は節形式に限定していない. これに対して本稿では, $B(\vec{x})$ を節形式に限定し, 関数記号を含む一般の第一階述語論理式について適用可能であるように拡張した. 節形式に限定することは記号論的手法ではよく行われていることであり, 任意の論理式は節形式に変換できることから問題はない.

拡張の要点は, Jeroslow の手法における障害物の条件を厳しくしている点にある. つまり, 定義 6(b) から異符号のリテラルのみで障害物の検出をすればよいことになる. このことにより, 変種独立割当てが妨害されているかどうかの判定が効率的になる. この制限が定理 2 を保存することは, 同符号の障害物は (1) 式を真偽を変えることなしに真理値を変えることができることから証明が可能である. また, この制限により導出原理との対応づけが可能となる.

6 例題

以下の論理式の充足可能性を調べる.

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee\sim Q(x))\wedge\sim P(a)\wedge Q(y)$$

(1) $B_1=(P(x)\vee\sim Q(x))\wedge\sim P(a)\wedge Q(y)$ とおく.
B_1 を真とする変種独立割当ては,
$P(a)=F,\ Q(x)=Q(y)=T,\ P(x)=T$ である.
障害物は, $P(a)$, $P(x)$ である.
最汎単一化作用素は, $\sigma_1=\{a/x\}$ である.
よって, 部分例示の拡張を行う.

(2) $B_2=B_1\sigma_1$ とする.
$B_1\wedge B_2$ を真とする変種独立割当ては,
$P(a)=F,\ Q(x)=Q(y)=T,\ P(x)=T,\ Q(a)=F$ である.
障害物は, $Q(y)$, $P(a)$ である.
最汎単一化作用素は, $\sigma_2=\{a/y\}$ である.
よって, 部分例示の拡張をさらに行う.

(3) $B_3=B_2\sigma_2$ とする.
$B_1\wedge B_2\wedge B_3$ を真とする変種独立割当ては存在しないので, 定理 1 より, 与えられた論理式は充足不能である.

7 おわりに

本稿では, 第一階述語論理の充足可能性問題に対する Jeroslow の手法を関数記号を含む場合に拡張した手法について述べた. これは Jeroslow の手法よりも障害物を検出する際に効率的である. また, 第一階述語論理の充足可能性問題を命題論理を用いて解くことができることから, 0-1 整数計画法などを用いた定量的手法が適用可能となる [4,5,6] .

参考文献

[1] Robinson J, A. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, 12:23–41, 1965.

[2] Chang and Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. ACADEMIC PRESS, 1973.

[3] Robert G.Jeroslow. Computation-oriented reductions of predicate to propositional logic. *Decision Support Systems*, 4:183–197, 1988.

[4] Hooker J, N. A quantitative approach to logical inference. *Decision Support Systems*, 4:45–69, 1988.

[5] Blair C, E, Jeroslow R, G, and Lowe J, K. Some results and experiments in programming techniques for propositional logic. *Computers and Operations Research*, 13(5):633–645, 1986.

[6] Williams H, P. Linear and integer programming applied to the propositional calculus. *International Journal of Systems Research and Information Science*, 2:81–100, 1987.