5S−7

F^2ISMにおける含意規則の導出*

若林 高明　三田村 保　大内 東†

北海道大学工学部‡

1 はじめに

大規模かつ複雑なシステムの構造を同定する構造モデリングの代表的なものにJ.N.Warfieldによって提案されたISM法がある．著者らはISMを改良したFISM (Flexible ISM)を開発している[1]．一方，Ragadeは要素間の関係の強さを考慮し二項関係の有無をファジイ化したファジイISMを提案している[2]．現在，著者らはこれらを融合したF^2ISM (Fuzzy Flexible ISM)を開発中である．F^2ISMにおいて，システムの構造をファジイ可到達行列モデルとして明確化する過程をファジイ具象化という．Ragadeのファジイ ISMにおける具象化理論はモデリングにおける柔軟性に欠けている．本研究では，柔軟なファジイ構造モデリングを実現するため，従来のISMにおける推移的具象化の一般化理論[3]をファジイISMの場合に拡張することを試みる．

2 諸定義

本稿で使用する諸定義を述べる．

・$N=\{1,2,\cdots,n\}$：システム構成要素に対応する添字集合．・$\bar{R}$：システム構成要素間の二項関係の強さの度合い（ファジイ二項関係）を表すステートメント．$\bar{R}$は$\mu_{\bar{R}}: N\times N\to[0,1]$なるメンバシップ関数$\mu_{\bar{R}}$によって特性づけられる．$\bar{R}$は反射的かつ推移的である（$\mu_{\bar{R}}(i,i)=1, \forall i\in N$, $\mu_{\bar{R}}(i,j)=\max_k \min(\mu_{\bar{R}}(i,k),\mu_{\bar{R}}(k,j))\ \forall i,j,k\in N$）とする．

・$R, \hat{R}$：いずれも$N\times N$上のファジイ二項関係で
　$(i,j)\in R: i\to j$の関係が既知である，
　$(i,j)\in\hat{R}: i\to j$の関係が未知である．

・ファジイ行列M,A,X：いずれもNを添字集合とするファジイ正方行列でその(i,j)要素は次式で与えられる．

$$M_{ij}=\begin{cases} m_{ij}, & (i,j)\in R\\ x_{ij}, & (i,j)\in\hat{R}\end{cases}\tag{1}$$

$$A_{ij}=\begin{cases} m_{ij}, & (i,j)\in R\\ 0, & \text{上記以外}\end{cases}\tag{2}$$

$$X_{ij}=\begin{cases} x_{ij}, & (i,j)\in\hat{R}\\ 0, & \text{上記以外}\end{cases}\tag{3}$$

但し，x_{ij}は未知数（ファジイ変数）である．明らかに

$$M=A+X\tag{4}$$

が成り立つ．

・ファジイ行列Mに対して反射性，推移性を次のように定義する．
　反射性：$m_{ii}=1\ \forall i\in N$
　推移性：$m_{ij}=\max_k[\min(m_{ik},m_{kj})]\ \forall i,j,k\in N$

・ファジイ行列A,Bに対して次の演算を定義する．

$$(A+B)_{ij}=\max(a_{ij},b_{ij})\tag{5}$$

$$(AB)_{ij}=\max_k[\min(a_{ik},b_{kj})]\tag{6}$$

*Derivation of Implication Rules for F^2ISM
†Taka'aki WAKABAYASHI, Tamotsu MITAMURA and Azuma OHUCHI
‡HOKKAIDO University

・ファジイ行列Mが（ファジイ）可到達行列であるための条件は

$$M=M+I\tag{7}$$

$$M^2=M\tag{8}$$

・未知数の値の含意
ファジイ行列Mのある未知数x_{lm}の値が“含意される”とは，別の未知数x_{ij}の値が与えられることによって，Mの推移性から，$x_{lm}\le p\ (p\in[0,1))$, $x_{lm}\ge q\ (q\in(0,1])$のように未知数x_{lm}の値の取り得る範囲が制約されることをいう．

・ファジイ行列Mの無矛盾，極大性
(1) Mが無矛盾であるとは

$$(M_{ij}<M_{ik})\wedge(M_{ij}<M_{kj})\tag{9}$$

を満たす$i,j,k\in N$が存在しないことを言う．
(2) Mが極大であるとは，任意の未知数x_{lm}の添字の組(l,m)に対して以下が成り立つような添字$k\in N\ (k\ne l, k\ne m)$が存在しないことをいう．

$$(M_{km}<M_{kl})\wedge((k,l)\in R)\wedge((k,m)\in R)\tag{10}$$

$$(M_{lk}<M_{mk})\wedge((l,k)\in R)\wedge((m,k)\in R)\tag{11}$$

$$((l,k)\in R)\wedge((k,m)\in R)\wedge(M_{lk}\ne 0)\wedge(M_{km}\ne 0)\tag{12}$$

言い換えると，Mが無矛盾であるとは，Mの既知情報の中に推移性に矛盾する情報が含まれていないことを言い，Mが極大であるとは，Mの既知情報と推移性のみを用いて，値が含意される未知数が存在しないことを言う．

3 含意規則の導出

システムモデルを表すファジイ行列Mが可到達であるための条件より，(4)式を(8)式に代入して展開し，(i,j)要素について書き下すと次式を得る．

$$\sum_k A_{ik}A_{kj}+\sum_k A_{ik}X_{kj}+\sum_k X_{ik}A_{kj}+\sum_k X_{ik}X_{kj}=A_{ij}+X_{ij}\tag{13}$$

(13)式を$(i,j)\in R$, $(i,j)\in\hat{R}$の場合に分けて考える．
(1) $(i,j)\in R$の場合
$X_{ij}=0$より

$$\sum_k A_{ik}A_{kj}+\sum_k A_{ik}X_{kj}+\sum_k X_{ik}A_{kj}+\sum_k X_{ik}X_{kj}=A_{ij}\tag{14}$$

(2) $(i,j)\in\hat{R}$の場合
$A_{ij}=0$より$\sum_k A_{ik}A_{kj}=0$であるから，次式を得る．

$$\sum_k A_{ik}X_{kj}+\sum_k X_{ik}A_{kj}+\sum_k X_{ik}X_{kj}=X_{ij}\tag{15}$$

これらのうち，Mの無矛盾，極大性により，未知数間の含意関係が得られるのは，(14)式左辺第4項と(15)式左辺各項である．それらを書き下すと以下のようになる．

$$X_{ik}X_{kj}\le A_{ij}\tag{16}$$

$$A_{ik}X_{kj} \le X_{ij} \tag{17}$$

$$X_{ik}A_{kj} \le X_{ij} \tag{18}$$

$$X_{ik}X_{kj} \ \le \ X_{ij} \tag{19}$$

これらより，以下の含意関係を得る．但し，一部については添字を適当に入れ換えて，x_{ij}の値が与えられた場合の含意の形を記す．
(16)式より，

$$X_{ij} \ > \ A_{ik} \ \rightarrow \ X_{jk} \ \le \ A_{ik};\ (j,k) \in \tilde{R},\ (i,k) \in R \tag{20}$$

$$X_{ij} \ > \ A_{kj} \ \rightarrow \ X_{ki} \ \le \ A_{kj};\ (k,i) \in \tilde{R},\ (k,j) \in R \tag{21}$$

(17)式より，

$$X_{ij} \ < \ A_{ik} \ \rightarrow \ X_{kj} \ \le \ X_{ij};\ (k,j) \in \tilde{R},\ (i,k) \in R \tag{22}$$

$$(X_{ij} \ < \ A_{ki}) \wedge (X_{ij} \neq 0) \ \rightarrow \ X_{kj} \ \ge \ X_{ij};\ (k,j) \in \tilde{R},\ (k,i) \in R \tag{23}$$

$$(X_{ij} \ \ge \ A_{ki}) \wedge (A_{ki} \neq 0) \ \rightarrow \ X_{kj} \ \ge \ A_{ki};\ (k,j) \in \tilde{R},\ (k,i) \in R \tag{24}$$

(18)式より，

$$X_{ij} \ < \ A_{kj} \ \rightarrow \ X_{ik} \ \le \ X_{ij};\ (i,k) \in \tilde{R},\ (k,j) \in R \tag{25}$$

$$(X_{ij} \ < \ A_{jk}) \wedge (X_{ij} \neq 0) \ \rightarrow \ X_{ik} \ \ge \ X_{ij};\ (i,k) \in \tilde{R},\ (j,k) \in R \tag{26}$$

$$(X_{ij} \ \ge \ A_{jk}) \wedge (A_{jk} \neq 0) \ \rightarrow \ X_{ik} \ \ge \ A_{jk};\ (i,k) \in \tilde{R},\ (j,k) \in R \tag{27}$$

以上の含意を二項含意と呼ぶ．(19)式より得られる三項含意については，未知数のいずれか一つを未知から既知に変更した場合，上記の二項含意のいずれかとなる．

4 Mの更新

ファジイ具象化とは，“無矛盾，極大なファジイ行列Mの未知数の一つに値を与えると同時に，推移性により含意される未知数にも値を与える”ということを繰り返すことにより，無矛盾，極大性を満たしながら，Mの既知情報を増加させてゆき，最終的にMを全体が既知の可到達行列にすることである．
この過程におけるMの更新アルゴリズムの概略を以下に記す．

begin

1. Mから一つの未知数x_{ij}を選ぶ．
2. $x_{ij} \leftarrow \alpha \in [0,1]$.
3. (a) 二項含意によりx_{ij}から他の未知数を含意．
   (b) x_{ij}に関する三項含意を二項含意に更新．
4. x_{ij}から含意されたすべての未知数x_{lm}(間接的に含意されたものを含む）に制約範囲内の値を代入し，$x_{lm} \rightarrow x_{ij}$として，3-(a),(b)を行う．

end;

このアルゴリズムの正当性は以下の定理により示される．

［定理］無矛盾，極大なファジイ行列において，ある値の与えられた未知数x_{ij}から二項含意により含意されるすべての未知数（間接的に含意されるものを含む）に制約範囲内の値を代入した行列Mは，無矛盾，極大である．
(略証）Mが矛盾していると仮定すると，$M_{ik}M_{kj} > M_{ij}$となる添字$k \in N$が存在する．一方，x_{ij}から含意されて値の定まった未知数は(20)-(27)式のいずれかによって含意されたものである．これらは明らかに(16)-(18)式のいずれかを満たしており，既知の要素とx_{ij}から含意されて値の定まった未知数をすべて$M_{lm}(l,m \in N)$のようにかくと，(16)-(18)式のいずれも，$M_{ik}M_{kj} \le M_{ij}$となる．よって，Mが矛盾するような添字kは存在しない．よって，Mは無矛盾である．
次に，Mが極大でないとすると，ある未知数x_{lm}に対し，(10)-(12)式のいずれかが成り立つような$k \in N$が存在する．例えば，(10)式が成り立っているとすると，これは，添字を入れ換えることにより，(20)または，(22)の形の含意となることがわかる．即ち，未知数x_{lm}が二項含意により含意されてしまう．これは，x_{ij}から（間接的に含意できるものを含めて）含意できる未知数の値がすべて決定しているという仮定に反する．
(11)または(12)式が成り立つ場合も同様に二項含意によって未知要素が含意される．よってMは極大である．□

5 例

図1のモデルで二項含意の例を挙げると，

$$x_{25} \ > \ m_{21}(=0.4) \ \rightarrow \ x_{51} \ \le \ 0.4 \tag{28}$$

$$x_{25} \ > \ m_{23}(=0.4) \ \rightarrow \ x_{53} \ \le \ 0.4 \tag{29}$$

$$x_{25} \ > \ m_{24}(=0.4) \ \rightarrow \ x_{54} \ \le \ 0.4 \tag{30}$$

などがある．

	1	2	3	4	5
1	1	x_{12}	x_{13}	0.7	x_{15}
2	0.4	1	0.4	0.4	x_{25}
3	x_{31}	x_{32}	1	x_{34}	x_{35}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	1	x_{45}
5	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	1

図1：無矛盾，極大な可到達行列Mの例

$x_{25} = 0.6$の情報を入力すると，$x_{51} \le 0.4$, $x_{53} \le 0.4$, $x_{54} \le 0.4$が含意される．$x_{51} = x_{53} = x_{54} = 0.4$とすると，これらから新たに含意される未知数はなく，Mは図2のように更新される．このとき，三項含意の未知数の一つに値が与えられたことにより，

$$x_{15} \ < \ m_{25}(=0.6) \ \rightarrow \ x_{12} \ \le \ x_{15} \tag{31}$$

などの新たな二項含意が生じている．

	1	2	3	4	5
1	1	x_{12}	x_{13}	0.7	x_{15}
2	0.4	1	0.4	0.4	0.6
3	x_{31}	x_{32}	1	x_{34}	x_{35}
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	1	x_{45}
5	0.4	x_{52}	0.4	0.4	1

図2：更新されたM

6 おわりに

本稿では，ファジイ具象化の一般化の第一歩として，未知要素が既知となった場合に他の未知要素を含意するための規則を導出した．この規則を用いたファジイ具象化の一般化理論の構築し，これを用いて，柔軟なファジイ構造モデリングの実現を可能にするF^2ISMシステムを計算機上で開発することが今後の課題である．

参考文献

[1] 大内："FISM：柔軟な発想支援ツール"，発想支援システムの構築に向けて－第7回国際研シンポジウム報告書，pp398-411 (株)富士通研究所 (1990).

[2] R.K.Ragade："Fuzzy Interpretive Structural Modeling", *J. of Cybern.*, Vol.6, pp189-211 (1976).

[3] 栗原，大内，加地："ISMにおける推移的具象化の一般化"，電学論C，104,1, pp1-8 (1984).