5B−9

充足可能性問題の新解法について

田中 嘉浩
(財) 電力中央研究所 経済研

1 序

充足可能性問題 (SAT) は基本的な問題であり，3-SAT が NP 完全問題であることや，Horn-SAT が線形時間で解けることがよく知られている．推論に於いては Horn 節は各エキスパート・システム等に用いられているが，記述能力が劣り，より一般での枠組でのアルゴリズムの開発が強く望まれている．そこで最近では LP 解法の進歩に伴って，分枝限定法，切除平面法等，数量的な方法 [1] が着目されている．

本稿では SAT の新しいアルゴリズムを提案し，その振舞いや今後の方向性について言及する．

2 準備

論理変数 $x_1, ..., x_n$ からなる節 C_i, $i = 1, ..., m$ の論理和標準形

$$S = C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_m, \qquad (1)$$

を考える．その双対形をとると，(1) は

$$\bar{S} = D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_m, \qquad (2)$$

但し，D_i, $i = 1, ..., m$ は論理変数の積，となる．

定理 1. SAT が充足不可能であるための必要十分条件は，その双対の論理積標準形を 1 に簡単化できることである． ▮

カルノー図を考え，$u(\bar{S})$ を 1 の占める割合とすると，充足不可能性と $u(\bar{S}) = 1$ は同値になる．

On the new algorithm for the satisfiability problem
Yoshihiro TANAKA
CRIEPI, Japan

$u(\bar{S})$ の上界値として

$$w(\bar{S}) = \sum_{i=1}^{m} 2^{-len(D_i)}, \qquad (3)$$

但し，$len(D_i)$ は D_i に含まれるリテラル数を考えることができる．

系 1. $u(\bar{S}) \leq w(\bar{S})$ であり，$w(\bar{S}) < 1$ ならば SAT は充足可能である． ▮

例 1. $S = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_4)$ では，$w(\bar{S}) = 1$, $u(\bar{S}) = 7/8$.

3 アルゴリズム

D_i を直交化して $u(\bar{S})$ の値を求めることを考える．

前処理として Davis-Putnam の手続きの一部

(C)　: 1 リテラル規則による簡単化

(MF) : 純リテラル規則による簡単化

を行なう．

アルゴリズムは次の様になる．但し，$w(Q_1) = w(D_1), w(Q_{k+1}) = w(D_{k+1}) - w(\bigvee_{i=1}^{k} Q_i \wedge D_{k+1})$ と定義する．

アルゴリズム 1

1. $w(\bar{S}) \geq 1$ ならば，$\bar{S}$ に (C) と (MF) を適用する．$w(\bar{S}) < 1$ ならば，exit (充足可能)．$\bar{S}$ を節の短い順に並べ換え，新たに $\bar{S} = D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_m$ とする．
2. $Q_1 := D_1$; $r_1 := w(\bar{S})$; $r'_1 := w(Q_1)$; $k := 1$;
   while $r_k \geq 1 \wedge r'_k \neq 1 \wedge k < m - 1$ **do**

   $k \;:=\; k + 1;$

$$
\begin{aligned}
Q_k &:= D_k - (\bigvee_{i=1}^{k-1} Q_i) \wedge D_k; \\
r_k &:= r_{k-1} - w(D_k) + w(Q_k); \\
r'_k &:= r'_{k-1} + w(Q_k)
\end{aligned}
$$

$r_k < 1$ (充足可能), $r'_k = 1$ (充足不可能) ならば停止.

この過程で Q_k はできるだけ簡単な形にする.

定理 2. アルゴリズム 1 は, 点列

$$r'_1 \leq \cdots \leq r'_m = u(\bar{S}) = r_m \leq \cdots \leq r_1 = w(\bar{S}). \tag{4}$$

を生成する. ∎

4 数値例

アルゴリズムの振舞いを調べるため, ランダム SAT ([2] 参照) に対する若干の数値実験を行った. 各節の長さを固定しない問題は, $2v$ リテラル (v 変数) をそれぞれ確率 p で含む節を t 個発生させることにより作った. 言語に C (ビット演算) を用い, 一様乱数を利用して SUN3/160 上で走らせた結果の一部を示す.

表 1a. $t = 50$ の結果.

		p				
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
	5	U	U	U	U	U
	10	U	U	U	S	A
v	15	U	U	B	C	s
	20	U	U	D	s	s
	25	U	S	s	s	s
	30	S	S	s	s	s

表 1b. $t = 50$ の結果.

	v	m	反復回数	CPU [sec]
A	10	30	24	0.17
B	15	23	19	0.23
C	15	24	9	0.05
D	20	21	10	0.08

計算結果全体から次のことが分った.

- アルゴリズム 1 は各反復で充足不可能度の上下の推定値を与える.
- (C) と (MF) はとりわけ, p が小さい場合, t/v が十分大きい場合に有効である. p が大きいと $w(\bar{S}) < 1$ になる.
- 各 Q_k の節数はかなり小さく, ランダム SAT にアルゴリズム 1 は有効である.

5 コメント

一般の SAT に有効なアルゴリズムにするには, 直交化していく順序をもっと検討する必要があるが, その結果従来のアルゴリズムと異なった振舞いを示せる可能性は大きい.

また, 直接の関係はないが, Razborov [3] により単調増加関数 (の一部) に対する単調回路 (AND と OR だけを用いる回路) による計算量の非多項式の下界が発見されていることは興味深い.

謝辞. 御討論頂いた情報システム部の皆様に感謝致します.

参考文献

[1] J.N. Hooker, "A quantitative approach to logical inference", *Decision Support Systems* 4 (1988) 45–69.

[2] P. Purdom, "Random satisfiability problems", Intern. Workshop on Discrete Algorithms and Complexity, 89-AL-12, IECE Japan, 1989, pp. 253–259.

[3] A.A. Razborov, "Lower bounds for the monotone complexity of some Boolean functions", *Soviet Math. Dokl.* 31 (1985).

[4] Y. Tanaka, "A dual algorithm for the satisfiability problem", *Information Processing Letters*, to appear.