

最適化手法を用いた点列からの単位4元数積分曲線の生成

崎 山 直 樹[†] 三 浦 憲 二 郎^{††} 金 子 透^{††}

リバースエンジニアリングでは、既存の工業製品や部品の外形の測定データからコンピュータ内に形状モデルを作成し、そのモデルを利用してそれらの工業製品や部品の評価や再設計を行う。しかしながら、測定データはノイズ等により誤差が含まれているため、それらのデータからリバースエンジニアリングに必要とされる滑らかな高品質な曲線や曲面を再生することは困難である。そこで、本研究では曲線の再生に研究の焦点を絞り、曲率の変動を抑制する性質を持つ単位4元数積分(QI)曲線により曲線を再生することを考える。最良な近似曲線を求めるために、点列とQI曲線との距離の2乗和を目的関数とし、その目的関数を最小化することによって最適化を行う。従来のQI曲線の定義法では曲線の長さを1つのパラメータとして与えたが、その定義法では曲率の大きな部分と小さな部分の混在に強い制限を与えるので、本研究ではより近似度を高めるためにQI曲線を1つのセグメントとし、複数のセグメントを滑らかに接続する。個々のQI曲線としてはBézier型QI曲線を用い、それらを G^1 連続性(接線の連続性)を保証して接続することにより1本の近似曲線を算出する。本研究の手法ではノイズが強く混在している場合でも滑らかな曲線が得られる。

Reconstruction of QI Curves with Optimization Techniques

NAOKI SAKIYAMA,[†] KENJIRO T. MIURA^{††} and TORU KANEKO^{††}

In reverse engineering, geometric models are reconstructed in the computer from measurement data of shapes of industrial products and parts and they are used to evaluate them and develop new products and parts. However, it is very difficult to reconstruct high quality curves and surfaces because of measurement errors induced by, for example, noise. Therefore in this paper, we focus on curve case and use the unit quaternion integral (QI) curve for reconstruction that has a property to suppress abrupt changes of curvature. In order to get the best approximation curve, we perform optimization whose objective function is the sum of squares between given points and their corresponding points on the curve. The length of the curve is given as a parameter for the standard QI curve formulation and that is too restrictive to have high and low curvature parts in the same curve. Instead of using one QI curve, we use Bézier-type QI curves as segments and connect them with G^1 continuity to obtain better approximation. Our method can reconstruct high quality curves even from degraded point data by strong noises.

1. はじめに

リバースエンジニアリングでは、既存の工業製品や部品の外形の測定データからコンピュータ内に形状モデルを作成し、そのモデルを利用してそれらの工業製品や部品の評価や再設計を行う。しかしながら、測定データはノイズ等により誤差が含まれているため、それらのデータからリバースエンジニアリングに必要とされる滑らかな高品質な曲線や曲面を再生することは困難である。

そこで、本研究では曲線の再生に研究の焦点を絞り、曲率の変動を抑制する性質を持つ単位4元数積分(QI)曲線^{1),3)}により曲線を再生することを考える。QI曲線を用いた点列の内挿法は三浦²⁾により提案されているが、ノイズを含む点列データを内挿したのではリバースエンジニアリングに必要とされる高品質な曲線は得られない。

したがって、本研究では点列を内挿するのではなく、点列を最良近似するQI曲線を生成する手法を提案する。最良な近似曲線を求めるために、点列とQI曲線との距離の2乗和を目的関数とし、その目的関数を最小化することによって最適化を行う。従来のQI曲線の定義法では曲線の長さを1つのパラメータとして与えたが、その定義法では曲率の大きな部分と小さな部分の混在に強い制限を与える。

[†] 富士通株式会社
FUJITSU LIMITED

^{††} 静岡大学工学部機械工学科
Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

本研究ではより近似度を高めるために複数の Bézier 型 QI 曲線を滑らかに接続する手法を提案する. Bézier 型 QI 曲線を 1 つのセグメントとし, 複数のセグメントを G^1 連続性 (接線の連続性) を保証して接続することにより 1 本の近似曲線を算出する. 後述するように従来の曲線による近似では曲率が乱れる (平面曲線の場合, 曲率の正負が反転する) のに比べて, 本研究の手法ではたとえノイズが強く混在している場合でも滑らかな曲線が得られる.

2. 単位 4 元数積分曲線

2.1 単位 4 元数積分曲線の定義

一般的に, 空間曲線 $C(s)$ は次式で与えられる:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s t(s) ds. \tag{1}$$

ただし, P_0 は始点, s は P_0 から $C(s)$ までの弧長であり, $t(s)$ は s における曲線の接線ベクトルである. そこで, 接線ベクトル $t(s)$ を次式のように定義する:

$$t(s) = q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s). \tag{2}$$

ただし, $q(s)$ は単位 4 元数 (unit quaternion) であり, 単位ベクトル $\hat{v}_0 = (x, y, z)$ は 4 元数 $(0, x, y, z)$ と解釈する. このとき, 空間曲線は単位 4 元数 $q(s)$ を用いて次式のように表される:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds. \tag{3}$$

ここで, s は弧長パラメータであり, \hat{v}_0 は任意の単位定数ベクトルとする. この形式が最も一般的な単位 4 元数積分 (QI) 曲線の定式化である.

2.2 Bézier 型単位 4 元数積分曲線

上記の QI 曲線の定義法では曲線の長さを 1 つのパラメータとして与えたが, その定義法では曲率の大きな部分と小さな部分の混在に強い制限を与える. そこで, 本研究ではより近似度を高めるために複数の Bézier 型 QI 曲線をセグメントとして滑らかに接続する. 複数のセグメント間の G^1 連続性 (接線の連続性) を保証してそれらを接続することにより 1 本の滑らかな近似曲線を算出する.

点列全体を複数セグメントに分け, i 番目のセグメントの点列を次数 (曲線の定義に用いる Bézier 型単位 4 元数曲線の次数) k の 1 本の Bézier 型 QI 曲線 $C_i(s)$:

$$C_i(s) = P_{i,0} + \int_0^s q_i \left(\frac{s}{l_i} \right) \hat{v}_0 q_i^{-1} \left(\frac{s}{l_i} \right) ds$$

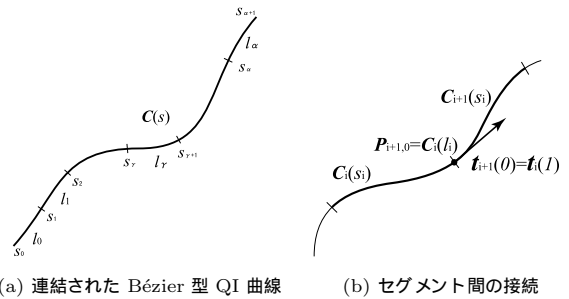


図 1 Bézier 型 QI 曲線
Fig. 1 Bézier-type QI curve.

$$= P_{i,0} + l_i \int_0^u q_i(u) \hat{v}_0 q_i^{-1}(u) du, \tag{4}$$

$0 \leq u \leq 1$

で近似する. l_i はこの i 番目のセグメントでの Bézier 型 QI 曲線の長さであり, $P_{i,0}$ は曲線の始点である. $q_i(u)$ は i 番目のセグメントにおける Bézier 型単位 4 元数曲線であり次式で与えられる:

$$q_i(u) = \left(\prod_{j=2}^1 \exp(\omega_{i,j} \tilde{B}_{j,k}(u)) \right) q_{i,0}.$$

$\omega_{i,j}$ は i 番目のセグメントにおける角微分ベクトルであり, この角微分ベクトル $\omega_{i,j}$ と長さ l_i を決めることにより, このセグメントでの Bézier 型 QI 曲線 $C_i(s)$ が定められる.

点列全体を滑らかな 1 本の曲線で近似するために, 各セグメントの曲線 $C_i(s)$ を図 1 (a) のようにつなぎ合わせて 1 本の曲線と見なし, その曲線を得ることを考える. セグメント数 $\alpha + 1$ の Bézier 型 QI 曲線を連結した曲線 $C(s)$ は, 弧長 s が β 目に含まれている ($s_\beta \leq s \leq s_{\beta+1}$) とすると次式で表される:

$$\begin{aligned} C(s) &= P_0 + \sum_{i=0}^{\beta-1} \left(\int_{s_i}^{s_{i+1}} q_i \left(\frac{s}{l_i} \right) \hat{v}_0 q_i^{-1} \left(\frac{s}{l_i} \right) ds \right) \\ &\quad + \int_{s_\beta}^s q_\beta \left(\frac{s}{l_\beta} \right) \hat{v}_0 q_\beta^{-1} \left(\frac{s}{l_\beta} \right) ds \\ &= P_0 + \sum_{i=0}^{\beta-1} \left(l_i \int_0^1 q_i(u) \hat{v}_0 q_i^{-1}(u) du \right) \\ &\quad + l_\beta \int_0^{u-\beta} q_\beta(u) \hat{v}_0 q_\beta^{-1}(u) du \\ &= C_u(u). \end{aligned} \tag{5}$$

隣接するセグメントの接続点において図 1 (b) のようにその両者の端点を等しくするため, $i + 1$ 番目のセグメントにおける QI 曲線の始点 $P_{i+1,0}$ は i 番目のセグメントの終点とする. すなわち,

$$P_{i+1,0} = C_i(l_i) \\ = P_{i,0} + l_i \int_0^1 q_i(u) \hat{v}_0 q_i^{-1}(u) du. \quad (6)$$

セグメントの接続点において図 1 (b) のように接線
の方向を等しくするために, $i + 1$ 番目のセグメント
における Bézier 型 QI 曲線の接線方向 $t_{i+1}(0) =$
 $q_{i+1}(0) \hat{v}_0 q_{i+1}^{-1}(0)$ と i 番目のセグメントの接線方向
 $t_i(1) = q_i(1) \hat{v}_0 q_i^{-1}(1)$ を等しくする. すなわち,

$$q_{i+1}(0) \hat{v}_0 q_{i+1}^{-1}(0) = q_i(1) \hat{v}_0 q_i^{-1}(1). \quad (7)$$

$q_i(1)$ を与えたとしても $q_{i+1}(0)$ は一意に定まらないが,
最適化に用いる変数を減らすために以下の十分条件
を用いる.

$$q_{i+1}(0) = q_i(1). \quad (8)$$

これらの条件より, 次数 k , セグメント数 $\alpha + 1$ の
Bézier 型 QI 曲線は, $k \times (\alpha + 1)$ 個の角微分ベクトル
 $\omega_{i,j}$ と $\alpha + 1$ 個の l_i を与えることにより曲線の形状が
定義され, 位置と接線方向を等しくしているため G^1
連続性が満足される.

式 (5) の定式化では, 各セグメントごとにその長さ
 l_i を持つので曲率の大きな部分と小さな部分を隣接させ
ることができる. 工業製品や部品の外装設計に必要とされる
曲線はカムの表面形状のように G^2 連続性 (曲率の連続性)
を要求される場合もあるが, 意匠設計に必要とされる曲線
では, 直線と円弧の接続が許容されるように必ずしも G^2
連続性は必要とされず, G^1 連続性で十分である場合が多い.
そこで, 本研究ではセグメントの接続点では位置と接線
方向の連続性だけを満足させ曲率の連続性は保証しない.

3. Bézier 型 QI 曲線による点列近似アルゴリズム

3.1 点列近似アルゴリズムの概要

Bézier 型 QI 曲線による点列近似アルゴリズムは, 以下の
5 ステップから成る.

- (1) 与えられた点列の曲率プロファイルから各セグメント
に対応する区間に分割する.
- (2) QI 曲線の初期形状を得るために, 与えられた点列を,
3 次 B-spline 曲線を用いて内挿する.
- (3) 内挿した B-spline 曲線から制御接線方向と各セグメント
の長さの初期値を求める.
- (4) 与点から近似曲線への距離の二乗和を目的関数
 $R = R(\omega_{0,0}, \omega_{0,1}, \dots, \omega_{\alpha,k-1}, l_0, l_1, \dots, l_\alpha)$ とし,
これに準 Newton 法を適用して QI 曲線の角微分ベクトル
 $\omega_{i,j}$ と曲線の長さ l_i を決定する.
- (5) (必要に応じて) 生成した Bézier 型 QI 曲線を

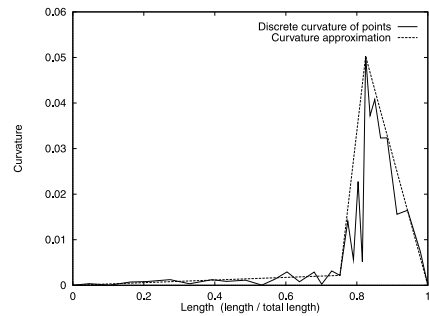


図 2 曲率プロファイルの直線近似による区間分割例 (3 セグメント)

Fig. 2 Segmentation example by linear approximation of the curvature profile (13 segments).

B-spline 曲線に変換する.

それぞれのステップの詳細を以下の章で説明する.

3.2 曲率プロファイルに基づいた区間分割

QI 曲線はクロソイド曲線を 3 次元空間への拡張・一般化した曲線であり, 2 次元平面内の次数 2 の Bézier 型 QI 曲線はクロソイド曲線に一致し, 曲率は曲線の弧長に正比例して変化する. したがって, この場合の QI 曲線の曲率プロファイルは 1 つの線分で表せる. また, 複数の Bézier 型 QI 曲線を接続した場合には曲率の連続性を保証しなければ不連続な線分列として表せる.

そこで, 点列から離散的に求めた曲率プロファイルを線分列で近似することを考え, 線分列でよい近似が得られるように各セグメントに対応する区間に点列を分割する. 図 2 の例では, 2 次元平面内の点列に対して, まずその曲率プロファイル (図中の実線) を計算し, それをよりよく近似するように 3 つの区間に分割を行っている. 近似計算に用いた QI 曲線の次数は 2 であり, QI 曲線列の曲率プロファイル (点線) は線分列として表されている. 区間の切れ目は線分の切れ目に対応する. 区間分割を適正に行うことにより, 曲率の大小が混在していても近似度の高い QI 曲線を生成することができる.

得られる曲線の良否は区間の分割数や分割位置に強く左右されるので自動的に求めることが望ましいが, 現状ではユーザが分割を決定している. 区間分割の自動化は今後の課題である.

3.3 パラメータ値の決定

前節の方法に基づいて点列を α 個の区間に分割したとき, パラメータ t を $0 \leq t \leq \alpha$ とし, 各区間のパラメータ幅を 1 とする. そのため, セグメント β に含まれる点 P_i に対するパラメータ t_i を次のように与える:

$$t_i = \beta + \sum_{k=0}^i \frac{\Delta_k}{s_\beta}. \tag{9}$$

ここで、 Δ_k は点間の距離 $\Delta_k = |P_k - P_{k-1}|$ ($\Delta_0 = 0$) であり、 β セグメントに含まれる点数が n_β のとき、 s_β は、

$$s_\beta = \sum_{j=0}^{n_\beta} \Delta_j \tag{10}$$

で与えられる。

3.4 初期値の計算

点列を B-spline 曲線で内挿することにより、QI 曲線を定義するための接線方向と長さの初期値を求める。ここでの計算は QI 曲線に与える初期値の算出が目的であり、内挿することが不可欠ではなく近似曲線を用いることも可能である。

3.4.1 B-spline 曲線による点列の内挿

標準的な手法⁴⁾を用いて、以下のように点列を内挿するユニフォームな 3 次 B-spline 曲線を求める。すなわち、点列に対応するノット点位置ベクトル P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が与えられたとき、制御点 Q_j ($j = 0, 1, \dots, n+1$) を求める。

各ノット点位置ベクトル P_i について、

$$P_i = \frac{1}{6}Q_{i-1} + \frac{2}{3}Q_i + \frac{1}{6}Q_{i+1} \tag{11}$$

が成り立つ。この連立方程式は未知数に対して条件数が 2 つだけ少ないので、両端において曲率を 0 とする条件：

$$Q_0 = Q_1, \quad Q_{n+1} = Q_n \tag{12}$$

を設定する。これにより、条件数と未知数が一致するので、連立方程式 (11) を解くことができる。

k 回目の繰返しにおける Q_i の近似ベクトル値を Q_i^k で表すと、 k 回目の繰返して Q_0^k, \dots, Q_i^k が求められたとき、次式が成り立つ。

$$P_i = \frac{1}{6}Q_{i-1}^k + \frac{2}{3}Q_i^k + \frac{1}{6}Q_{i+1}^{k-1}. \tag{13}$$

この式は次のように変形できる。

$$Q_i^k = P_i + \frac{1}{2} \left\{ P_i - \frac{1}{2} (Q_{i-1}^k + Q_{i+1}^{k-1}) \right\}. \tag{14}$$

したがって、 Q_i の k 回目と $k-1$ の差を δ_i^k とすれば、

$$\begin{aligned} \delta_i^k &= Q_i^k - Q_i^{k-1} \\ &= P_i - Q_i^{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ P_i - \frac{1}{2} (Q_{i-1}^k + Q_{i+1}^{k-1}) \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。初期値として、 $i = 1, 2, \dots, n-1$ に対し、

$Q_i^0 = P_i$ 、また $Q_0^0 = P_1, Q_{n+1}^0 = P_n$ とし、式 (14)、(15) において $i = 1$ の場合に Q_0^k の代わりに Q_0^{k-1} を用いる。これを設定した許容誤差 δ_s に対して、

$$\max\{\delta_i\} \leq \delta_s \tag{16}$$

を満たすまで繰り返すことにより、B-spline 曲線の制御点 Q_j を求めることができる。

3.4.2 初期値の算出

前項で求めた点列を内挿する B-spline 曲線を用いて、Bézier 型 QI 曲線をセグメントとする曲線 $C(s) = C_u(u)$ のパラメータ u_i での初期接線方向 t_i を、

$$t_i = \frac{d}{dt}C(u_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{d}{du}N_{j,4}(u_i)Q_j \tag{17}$$

で与える。

セグメントの長さの初期値 l_i は、

$$\begin{aligned} l_i &= \int_0^{u_i} C(u) du \\ &= \int_0^{u_i} \left(\sum_{j=0}^{n+1} N_{j,4}(u)Q_j \right) du \end{aligned} \tag{18}$$

で与える。

3.5 最適化手法の適用

3.5.1 目的関数

$n+1$ 点の点列 P_i ($i = 0, \dots, n$) が与えられたとき、目的関数 R を次式で定義する (図 3 参照)：

$$R = \sum_{i=0}^n (C_u(u_i) - P_i)^2. \tag{19}$$

ここで、 $C_u(u_i)$ は式 (5) から求められる QI 曲線上の点である。

次数 k 、セグメント数が $\alpha+1$ 個のとき、求めるべき制御変数は、 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k \times (\alpha+1)}, l_0, l_1, \dots, l_\alpha$

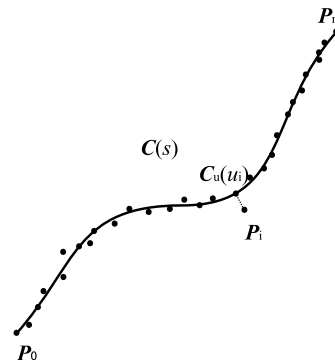


図 3 点列の近似

Fig. 3 Approximation of point data.

である．そこで，与えられた各点 P_i と QI 曲線上の点 $C_u(u_i)$ との距離の 2 乗の総和 R が最小となるように準 Newton 法を用いて制御変数 ω_i, l_i の最適値を求める．

3.5.2 準 Newton 法⁵⁾

準 Newton 法は，目的関数の最適解を求めることができる最も良い方法の 1 つである． N 次元空間の特定の点 P を座標系の原点とする．この任意の座標 x において，任意の関数 f は Taylor 展開することにより次の 2 次形式に近似できる．

$$\begin{aligned} f(x) &= f(P) + \sum_i \frac{\delta f}{\delta x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} x_i x_j \\ &\quad + \dots \\ &\approx c - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで，

$$\begin{aligned} c &\equiv f(P), \quad \mathbf{b} \equiv -\nabla f|_P, \\ [\mathbf{A}]_{i,j} &\equiv \left. \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} \right|_P \end{aligned} \quad (21)$$

である．行列 \mathbf{A} は，関数の点 P における Hesse 行列であり，成分は関数の 2 階偏導関数である．

ここで，関数 f の極小点 x_m において，次式が成り立つ．

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_m = \mathbf{b} \quad (22)$$

また，任意の点 x_i について，次式が成り立つ．

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \nabla f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{b}. \quad (23)$$

これら 2 式の差に逆行列 \mathbf{A}^{-1} を掛けると，次のようになる．

$$\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1} \cdot (-\nabla f(\mathbf{x}_i)) \quad (24)$$

そこで，式 (24) から x_i を x_{i+1} で置き換え，両辺の差をとれば，

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\nabla f(\mathbf{x}_{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_i))$$

となる．ここで，Hesse 行列の近似 \mathbf{H}_{i+1} が \mathbf{A}^{-1} を満たすとき，式 (25) は，

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = \mathbf{H}_{i+1} \cdot (\nabla f(\mathbf{x}_{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_i))$$

のようになる．

ダヴィドン・フレッチャー・パウエルの更新公式を用いれば， f が 2 次形式のとき Hesse 行列 \mathbf{H}_{i+1} は \mathbf{A}^{-1} に N ステップで収束するので⁵⁾，式 (24) より極小点 x_m を求めることができる．

3.6 B-spline 曲線形式への変換

B-spline 曲線は，多くの CAGD，CAD/CAM，CG システムにおいて標準的なデータ形式である．QI 曲線形式から B-spline 曲線形式へのデータ変換を行うために，QI 曲線上の点とそれに対応する B-spline 曲

線の点との距離の 2 乗の和が最小となるよう最小 2 乗法を用いる．Bézier 型 QI 曲線の次数が k のとき，B-spline 曲線の階数は $k+2$ とする．

階数 k の B-spline 曲線 $C(u)$ は次式で与えられる．

$$C(u) = \sum_{i=0}^n Q_i B_{i,k}(u). \quad (25)$$

Q_i ($i=0, \dots, n$) は制御点であり，QI 曲線形式から B-spline 曲線形式へのデータ変換にはユニフォームな B-spline 曲線を用いる．

目的関数 R は次のように定義する．

$$R = \sum_{i=0}^{m-1} (C(t_i) - P_i)^2. \quad (26)$$

P_i は Bézier 型 QI 曲線上の点であり m はその点数である．ここで，より忠実に Bézier 型 QI 曲線を近似するため，点 P_i の個数 m は QI 曲線生成に用いた点列数の 5 倍程度とする．目的関数 R を制御点で微分して 0 とすることで，制御点に関する連立一次方程式が得られる．これを解いて B-spline 曲線の制御点を求めることができる．

QI 曲線形式から B-spline 曲線形式へ変換することにより，他のシステムで QI 曲線の性質を持つ B-spline 曲線を利用することができる．また，階数 k のユニフォームな B-spline 曲線は C^{k-2} 連続性を満足するので，オリジナルの Bézier 型 QI 曲線の曲率が不連続であったとしても，階数 4 の B-spline 曲線を用いれば曲率が連続な近似曲線を生成することができる．

3.7 近似例

従来の近似手法と比較する目的で，図 4 から図 13 に点列データを近似した B-spline 曲線と本研究で提案した手法により生成した Bézier 型 QI 曲線を示す．図 4，図 5 を除いたそれ以外の例は実際の測定データから曲線を生成している．いずれの例でも近似に用いた B-spline 曲線と QI 曲線のセグメント数は一致させている．

図 4 と図 5 では， \sin 曲線上の 31 点を近似する例を示している．図 4(a) に点列を近似する階数 4 (次数 3)，セグメント数 4 の B-spline 曲線とその曲率半径を示す．図 4(b) にその点列から離散的に求めた曲率 (点線) と B-spline 曲線の曲率 (実線) を示す．B-spline 曲線による近似では，図 4(b) に示すように，階数が 4 であるため C^2 連続性が保たれており曲率プロファイルは連続的に変化しているが，点列から離散的に求めた曲率が単調に変化しているのに比べ，上がり下がり急な変化をともなっている．これに対し，次数 2

(定義に用いる単位 4 元数曲線の次数), セグメント数 4 の Bézier 型 QI 曲線による近似例(図 5)では離散的に求めた曲率プロファイルをよく近似するとともに, B-spline 曲線と比較して曲率プロファイルは直線的に単調に変化する滑らかな曲線が得られている.

図 6 (a) に 2 次元の測定データとこの点列を近似する階数 4, セグメント数 3 の B-spline 曲線とその曲率半径を示す. 図 6 (b) にそのデータから離散的に求めた曲率(点線)と B-spline 曲線の曲率(実線)を示す. この点列データは隣接する点の間隔が徐々に変化しており, B-spline 曲線による近似では曲率の正負が曲線の中央で反転を繰り返す, 高品質な近似曲線を生成することが難しいことが分かる. 図 7 (a) は同じ点列データを用いてセグメント数 3 の 2 次 Bézier 型 QI 曲線を生成した例とその曲率半径であり, 図 7 (b) は図 6 (b) に示した点列の曲率と Bézier 型 QI 曲線の曲率である. 本研究で提案する手法により, 曲率プロファイルは不連続ではあるが離散的に求めた曲率プロファイルを十分に近似しながら, 曲率の変化が単調な, 点列を近似する滑らかな曲線が生成できていることが分かる. 図 8 と図 9 に示した例(次数は B-spline で 3, QI で 2, セグメント数はともに 5)でも同様な結果が得られている.

図 10 は 3 次元の点列データを近似した例(次数は B-spline で 3, QI で 2, セグメント数はともに 3)である. 図 10 のように空間曲線に対して曲率半径を表示しても, その曲線の滑らかさを判定することは困難である. しかしながら, 図 11 (b) に示すように QI 曲線の曲率は, そのセグメントが平面曲線に近ければ直線的に変化し, 空間の中で捩れていれば 2 次関数的に滑らかに変化する. この例の QI 曲線では, 3 つのセグメントの中で, 中間のセグメントの始点と終点での接線方向が大きく変化しているためにそのセグメントでの曲率半径が乱れているように見えるが, 曲率の大きさの変化には図 11 に示したように乱れてはならず, B-spline 曲線の曲率プロファイル比べ QI 曲線のそれは少ない極値を持つ. 本論文では曲率はセグメント間で不連続であり, 曲率を連続とすることでより良質な曲線を生成することができると考えられる. 図 12 と図 13 も 3 次元データの近似例(次数は B-spline で 3, QI で 2, セグメント数はともに 16)であり, B-spline 曲線では曲率半径の分布が大きく乱れているのに対して, QI 曲線では乱れが少ない.

曲線の生成に要した処理時間と点列との誤差を表 1 に示す. 表中, rms (root mean square) は各点での誤差を 2 乗しそれらを平均した値の平方根, rms(%) は

表 1 処理時間と誤差 (Pentium III 600 MHz)
Table 1 Processing times and errors (Pentium III 600 MHz).

No	Curve	time (s)	rms	rms(%)	max dis.(%)
(1)	B-spline	0.016	1.17	0.44	0.67
	QI	54.7	0.069	0.026	0.041
(2)	B-spline	0.016	4.11	0.76	1.70
	QI	32.34	0.29	0.54	0.12
(3)	B-spline	0.016	6.03	1.03	1.88
	QI	74.36	0.20	0.034	0.057
(4)	B-spline	0.047	0.67	0.23	0.72
	QI	446.36	0.57	0.20	0.54
(5)	B-spline	1.28	0.21	0.024	0.15
	QI	10797	0.96	0.11	0.29

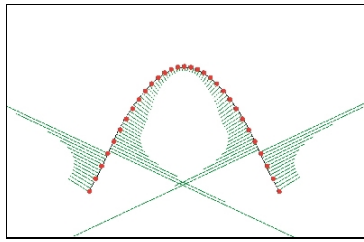
rms を曲線の全長で割った値, max dis.(%) は最大誤差を全長で割った値を示す. B-spline 曲線の生成は連立方程式を 1 回解けば解が求まるので高速に算出できるのに比べ, QI 曲線の算出には最適化のための繰返し計算が必要であり, より多くの処理時間がかかっている. しかしながら, 例 (5) を除いて rms, max dis.(%) とともに B-spline に比べて良好な値であり, 例 (5) を含めて振動の少ないより滑らかな曲率プロファイルが得られており, 本手法が有効であることが分かる.

図 14 は図 6, 7 に用いた点列データに全長に対して 0.5% の割合のランダムノイズを加えた点列データに対して Bézier 型 QI 曲線を生成した例である. ノイズを加えた点列に対しても, 曲率の変化を抑えた滑らかな曲線で点列を近似できていることが分かる.

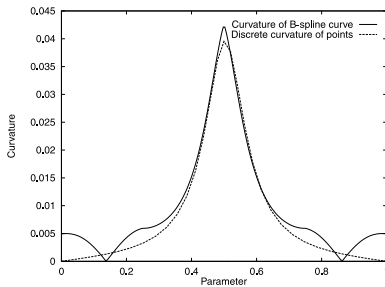
QI 曲線は一般的に用いられている曲線とはいえず, 他のシステムに曲線データを転送するためには NURBS, あるいはその簡単化した形式である B-spline 曲線に変換する必要がある. 変換例として, 図 7 に示した QI 曲線から 200 点を計算し, その点列から近似により生成した階数 4, セグメント数 117 個(制御点数 120 個)の B-spline 曲線を図 15 (a) に示す. 図 15 (b) の曲率プロファイルから分かるように, 曲率の性質がほぼそのまま B-spline 曲線に反映されている.

4. おわりに

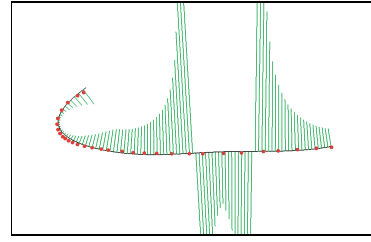
本研究では, 点列と曲線との距離の 2 乗和を目的関数とし, その目的関数を最小化する最適化手法を用いて, 点列を近似して QI 曲線を生成する手法を提案し, その手法による曲線例を示した. 生成された曲線は Bézier 型 QI 曲線を 1 つのセグメントとし, 複数のセグメントを G^1 連続性を保証しながら接続している. 従来の B-spline 曲線による近似では曲率が乱れるのに比べて, 本研究の手法ではたとえノイズが強



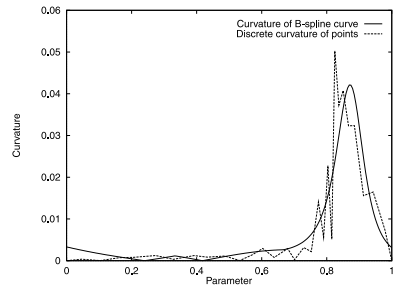
(a) B-spline 曲線と曲率半径



(b) 曲率プロファイル



(a) B-spline 曲線と曲率半径

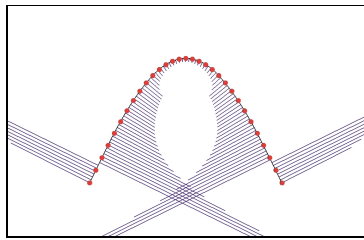


(b) 曲率プロファイル

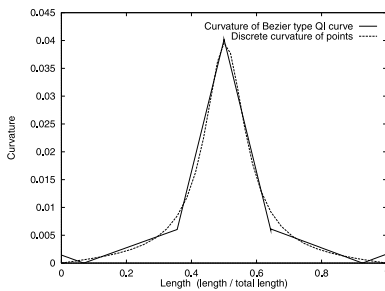
図 4 \sin 曲線上の点列 (31 点) から生成した B-spline 曲線例 (1)

Fig. 4 B-spline curve example generated with 31 points on the sine curve.

図 6 点列 (31 点) から生成した B-spline 曲線例 (2)
Fig. 6 B-spline curve example generated with 31 points.



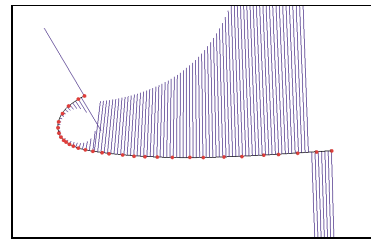
(a) QI 曲線と曲率半径



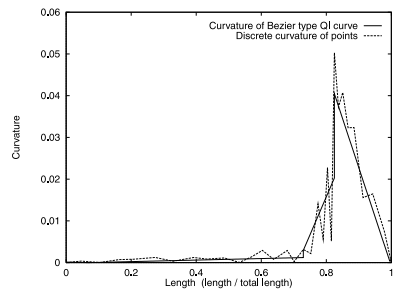
(b) 曲率プロファイル

図 5 \sin 曲線上の点列 (31 点) から生成した Bézier 型 QI 曲線例 (1)

Fig. 5 Bézier-type QI curve example generated with 31 points on the sine curve.

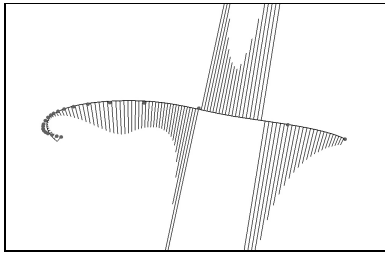


(a) QI 曲線と曲率半径

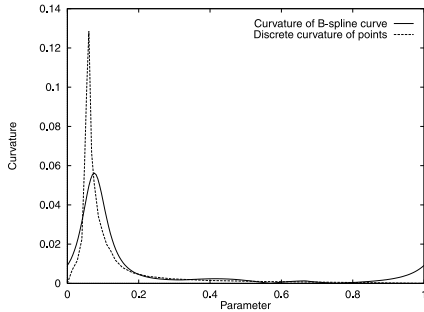


(b) 曲率プロファイル

図 7 点列 (31 点) から生成した Bézier 型 QI 曲線例 (2)
Fig. 7 Bézier-type QI curve example generated with 31 points.

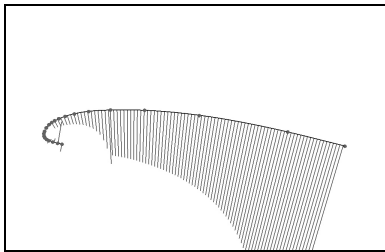


(a) B-spline 曲線と曲率半径

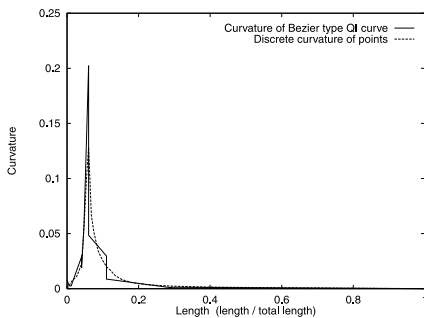


(b) 曲率プロフィール

図 8 点列 (22 点) から生成した B-spline 曲線例 (3)
Fig. 8 B-spline curve example generated with 22 points.

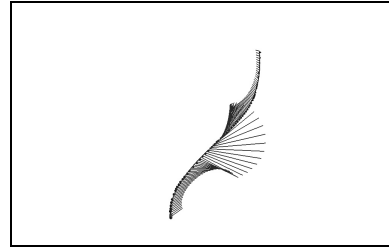


(a) QI 曲線と曲率半径

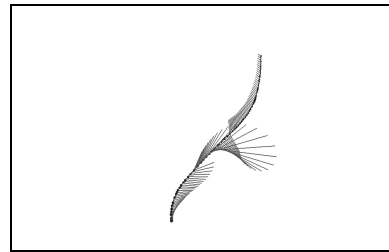


(b) 曲率プロフィール

図 9 点列 (22 点) から生成した Bézier 型 QI 曲線例 (3)
Fig. 9 Bézier-type QI curve example generated with 22 points.

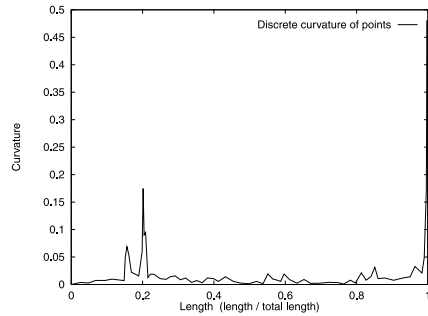


(a) B-spline 曲線と曲率半径

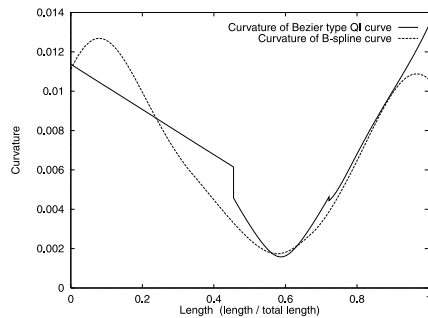


(b) QI 曲線と曲率半径

図 10 点列 (70 点) から生成した B-spline 曲線例 (4)
Fig. 10 B-spline and QI curve examples generated with 70 points.

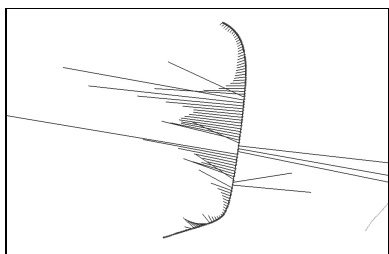


(a) 離散点からの曲率プロフィール

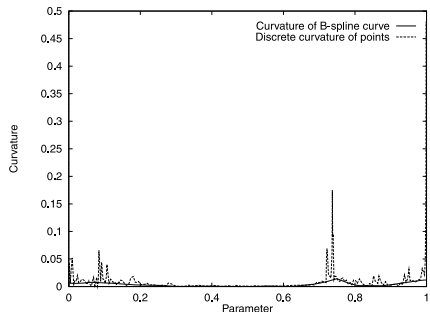


(b) B-spline 曲線と QI 曲線の曲率プロフィール

図 11 点列 (70 点) から生成した Bézier 型 QI 曲線例 (4)
Fig. 11 B-spline and QI curve examples generated with 70 points.

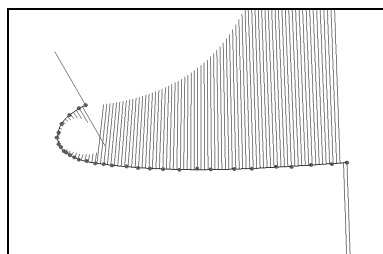


(a) B-spline 曲線と曲率半径

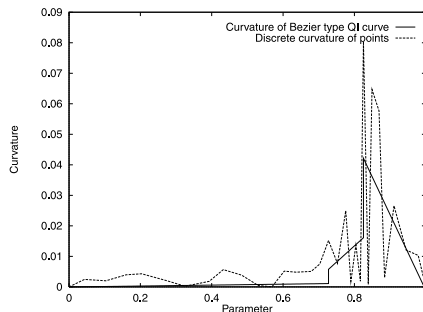


(b) 曲率プロファイル

図 12 点列 (164 点) から生成した B-spline 曲線例 (5)
Fig. 12 B-spline curve example generated with 164 points.

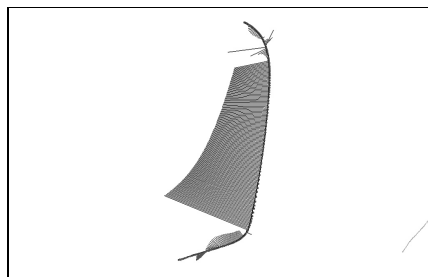


(a) QI 曲線と曲率半径

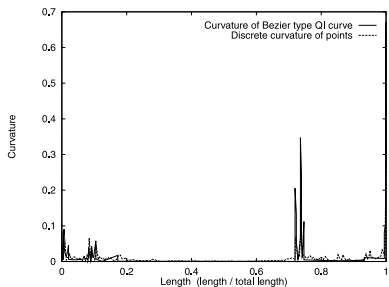


(b) 曲率プロファイル

図 14 点列 (含ノイズ) から生成した Bézier 型 QI 曲線例
Fig. 14 Bézier-type QI curve example generated with noise-mixed point data.

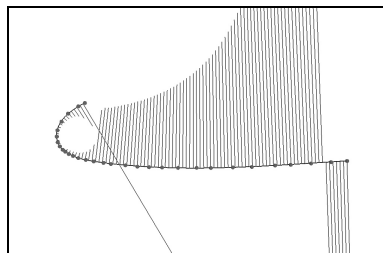


(a) QI 曲線と曲率半径

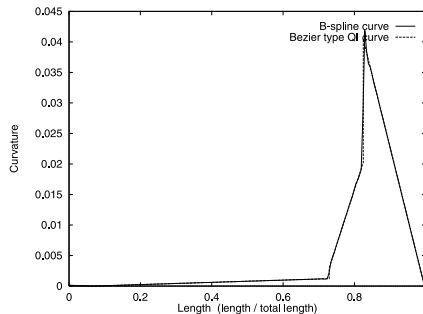


(b) 曲率プロファイル

図 13 点列 (164 点) から生成した Bézier 型 QI 曲線例 (5)
Fig. 13 Bézier-type QI curve example generated with 164 points.



(a) 変換後の B-spline 曲線と曲率半径



(b) 曲率プロファイル

図 15 Bézier 型 QI 曲線の B-spline 曲線への変換
Fig. 15 Conversion from Bézier-type QI curve to B-spline curve.

混在している場合でも滑らかな曲線が得られる。

3.2 節で述べたように得られる曲線の良否は区間の分割数や分割位置に強く左右されるので自動的に求めることが望ましく、区間分割の自動化は今後の重要課題である。また、生成時間の短縮も課題である。さらに本研究の結果に基づいて点群から QI 曲面を生成する研究を行う予定である。

謝辞 本研究の一部は、文部省科学研究費補助金〔基礎研究(C) 課題番号 10650141〕とスズキ株式会社より研究費の助成を受けている。ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 三浦憲二郎：単位 4 元数積分曲線，情報処理学会論文誌，Vol.38, No.11, pp.2227-2236 (1997).
- 2) 三浦憲二郎：単位 4 元数積分曲線による点列の内挿，情報処理学会論文誌，Vol.39, No.7, pp.2159-2167 (1998).
- 3) Miura, K.T.: Unit Quaternion Integral Curve: A New Type of Fair Free-form Curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.17, No.1, pp.39-58 (2000).
- 4) 山口富士夫：形状処理工学(II)，日刊工業新聞社 (1982).
- 5) Polak: *Computational Methods in Optimization*, Academic Press (1971).

(平成 12 年 10 月 2 日受付)

(平成 13 年 3 月 9 日採録)



崎山 直樹(正会員)

昭和 49 年生。平成 10 年静岡大学工学部機械工学科卒業。平成 12 年同大学院修士課程修了。同年富士通(株)入社。移動パケット通信システムのネットワーク開発に従事。



三浦憲二郎(正会員)

昭和 34 年生。昭和 57 年東京大学工学部精密機械工学科卒業。昭和 59 年同大学院修士課程修了。同年、キヤノン(株)入社。機械系 CAD/CAM システムの開発に従事。平成 3 年コーネル大学機械工学科博士課程修了(Ph.D.)。平成 5 年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授。平成 9 年静岡大学工学部機械工学科助教授。曲線・曲面の設計、CAD/CAM、要素自動分割、マイクロマシン等に興味を持つ。ACM、IEEE 各会員。



金子 透(正会員)

昭和 47 年東京大学工学部物理工学科卒業。昭和 49 年同大学院修士課程修了。同年日本電信電話公社(現 NTT)入社。以来、電気通信研究所にて主として画像処理の研究に従事。平成 9 年より静岡大学工学部機械工学科教授。工学博士。電子情報通信学科、画像情報メディア学会、精密工学会、IEEE 等会員。