1L－9

巡回セールスマン問題のニューラルフレームワーク

高橋祥兼
NTT情報通信処理研究所

1. まえがき

ニューラルネット（NN）を用いた巡回セールスマン問題（TSP）の近似解法として、①並列処理の利用（Hopfieldモデル[1]）、②自己組織化の利用（Elastic Net[2]、Kohonenアルゴリズム[3]）がある。これらは、いずれも各ユニット／シナプスが適切な微分方程式（差分方程式）を満たすとき、NN全体が最小巡回路対応の最適状態に収束することを暗黙原理としている。本稿では、この原理を微分方程式と最適化関数によって表現するTSPのニューラルフレームワークを提案する。

2. 従来アプローチの位置付け（表1）

2. 1 Hopfieldモデル

(1)NNモデル　ν_{Xi}をニューロンXiからの出力V_{Xi}（$0 \leqq V_{Xi} \leqq 1$）により、$\nu_{Xi}=0$（$0 \leqq V_{Xi} < 1/2$）、1（$1/2 \leqq V_{Xi} \leqq 1$）と表現し、（ν_{Xi}）を行X(都市)、列i(巡る順番)のNxN行列とする。可変シナプス荷重が[HL]の制約を満たし、同時にユニットが[HS1]と[HS2]に基づいて動作するとき、[HE]は極小値に収束する。

(2)微分方程式と最適化関数

[HS1] $du_{Xi}/dt=-(u_{Xi}/\tau)$
$-A(t)\Sigma_{j\neq i}\ V_{Xj}-B(t)\Sigma_{Y\neq X}\ V_{Yi}$
$-C(t)(\Sigma_X\Sigma_j\ V_{Xj}-N)$
$-D\Sigma_Y\ d_{XY}(V_{Y,i+1}+V_{Y,i-1})$

[HS2] $V_{Xi}=(1/2)[1+\tanh(u_{Xi}/u_{Xi}{}^0)]$

$A(t)=A\cdot\exp[-(1/\lambda)t]$; $B(t)=B\cdot\exp[-(1/\lambda)t]$; $C(t)=C\cdot\exp[-(1/\lambda)t]$;

A、B、C、D:正の定数； τ, λ, $u_{Xi}{}^0$:定数

[HE] $HE(V)=(D/2)\Sigma_X\Sigma_{Y\neq X}\Sigma_i\ d_{XY}\cdot V_{Xi}(V_{Y,i+1}+V_{Y,i-1})$; d_{XY}:X－Y間距離

[HL1] $\lambda\ (dT_{Xi,Yj}/dt)$
$=-T_{Xi,Yj}+\alpha\ (\nu_{Xi},\nu_{Yj})$

$\alpha\ (\nu_{Xi},\nu_{Yj})$: t, ν_{Xi}, ν_{Yj}の関数

[HL2] $T_{Xi,Yj}=-A(t)\delta_{XY}(1-\delta_{ij})$

表1. TSPへのニューラルアプローチの位置付け

アプローチ	TSP解法のNNによる表現	ユニット動作表現		シナプス動作表現	
		微分方程式	最適化関数	微分方程式	最適化関数
Hopfieldモデル	HSi,HL充足 → HE極小	出力方程式 [HS1][HS2]	ｴﾈﾙｷﾞｰ関数 [HE]	学習方程式 [HL]	－
Elastic Net	ELi充足 → EE極小	－	－	学習方程式 [EL1][EL2]	ｴﾈﾙｷﾞｰ関数 [EE]
Kohonenｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ	KL充足 → KD準最適	－	－	学習方程式 [KL]	分布関数 [KD]

A Neural Framework for the Traveling Salesman Problem
Yoshikane TAKAHASHI
NTT Communications and Information Processing Laboratories

$-B(t)\delta_{ij}(1-\delta_{XY})-C(t)-Dd_{XY}(\delta_{j,i+1}+\delta_{j,i-1})$; δ:クロネッカーδ

2. 2 Elastic Net

(1)NNモデル　都市$x_i(1\leqq i\leqq N)$と平面上の動点$y_j(1\leqq j\leqq N)$をニューロンとする。x_i-y_j間の可変シナプス荷重w_{ij}および$y_{j+1}-y_j$間の可変シナプス荷重v_jが〔EL1〕と〔EL2〕に基づいて動作するとき、〔EE〕は極小値に収束する。

(2)微分方程式と最適化関数

〔EL1〕 $d\rho_{ij}/dt$

$=-\alpha\Sigma_i T_{ij}\rho_{ij}-\beta K(\sigma_{j+1}-\sigma_j)$

$T_{ij}=\phi(|\rho_{ij}|,K)/\Sigma_k\phi(|\rho_{ik}|,K)$

$\phi(|\rho_{ij}|,K)=\exp(-|\rho_{ij}|^2/2K^2)$

$\rho_{ij}=x_i-y_j$;　$\sigma_j=y_j-y_{j-1}$

α,β,K: 正定数

〔EL2〕 $\sigma_j=-\rho_{ij}+\rho_{i,j-1}$;　$S_j=|\sigma_j|$

〔EE〕 $EE(|\rho_{ij}|,S_j)=-\alpha K\Sigma_i\log\Sigma_j\phi(|\rho_{ij}|,K)+\beta\Sigma_j S_{j+1}{}^2$

2. 3 Kohonenアルゴリズム

(1)NNモデル　都市$A_j(1\leqq j\leqq n)$と平面上の動点$X_i=X_i(t)(1\leqq i\leqq N$、以下$N=n$と簡単化)をニューロンとする。$X_i-A_j$間の可変シナプス荷重$h_{ij}=h_{ij}(t)(0\leqq h_{ij}\leqq 1)$と$A_j-A_k$間の固定シナプス荷重$\gamma_{jk}(0\leqq\gamma_{jk}\leqq 1)$が〔KL〕に基づいて動作するとき、〔KD〕のシナプス分布KD_tは準最適シナプス分布KD^*に収束する。

(2)微分方程式と最適化関数

〔KL〕 $dh_{ij}/dt=\eta_i(t,h_{rs},p)\varepsilon(t)h_{ij}[1-h_{ij}+(h_{ij}/H_i(t,p))-(h_{ij}/\Gamma_j(t,p))]$

① $p=p(t)=\Sigma_k p_k(t)k=k_0$、

$p_k(t)$: A_kの活性化確率(0または1)

② $h_{i0(t)k0}=\mathrm{Sup}_i\{h_{ik0}\}$,　$m\in N$として、

$\eta_i(t,h_{rs},p)=1(i\in[i_0(t)-m,i_0(t)+m])$

$=0(i\notin[i_0(t)-m,i_0(t)+m])$

(h_{rs}:全可変シナプス荷重の代表略記)

③ $\varepsilon(t)=c/(1+\log t)$;　c:正定数

④ $H_i(t,p)=\Sigma_k p_k(t)h_{ik}=h_{ik0}$

⑤ $\Gamma_j(t,p)=\Sigma_k p_k(t)\gamma_{jk}=\gamma_{jk0}$

〔KD〕 $KD_t(X_i,A_j)=h_{ij}$

$KD^*(X_i,A_j)=h_{ij}{}^*$;　$\forall i$に対して、

$h_{ij}{}^*=1(\exists_i j=j(i))$、$=0(j\neq j(i))$

$(\forall i\neq i'$に対して、$j(i)\neq j(i'))$

3. TSPのニューラルフレームワーク

ユニットiの状態(出力電圧等)を$V_i=V_i(t)$,状態変化確率を$p_i=p_i(t)$とし、シナプスの荷重を$T_{ij}=T_{ij}(t)$、荷重変化確率を$q_{ij}=q_{ij}(t)$とする。NNの動作は、一般に次の微分方程式系を満たす。

〔EQ1〕 $dV_i/dt=\phi_i(t,V_k,T_{kl},p_k,q_{kl})$

〔EQ2〕 $dT_{ij}/dt=\phi_{ij}(t,V_k,T_{kl},p_k,q_{kl})$

(V_k,T_{kl},p_k,q_{kl}:全変数の代表略記;

ϕ_i,ϕ_{ij}:関数)

従来のTSPアプローチでは、$\phi_i=\Phi_i(t,V_k,T_{kl})$,$\phi_{ij}=\Psi_{ij}(t,V_k,T_{kl})$なるLipschitz条件を満たす連続関数$\Phi_i$,$\Psi_{ij}$が存在する。そこで、Cauchyの定理より、〔EQ1〕、〔EQ2〕は唯一解$\{V_i\}$,$\{T_{ij}\}$をもつ。

NN全体の状態は、一般に次の最適化関数ξによって評価できる。

〔OF〕 $\xi=\xi(t,V_i,T_{ij},p_i,q_{ij})$

(V_i,T_{ij},p_i,q_{ij}: 全変数の代表略記)

ξは$t\to\infty$のとき最適状態ξ^*に収束する。従来のTSPアプローチでは、$\xi=\Xi_V(t,V_i)$または$\Xi_T(t,T_{ij})$なる連続関数Ξ_VまたはΞ_Tが存在し、NNが〔EQ1〕、〔EQ2〕を満たすとき、$\xi\to\xi^*$が成立する。

ニューラルフレームワーク〔EQ1〕、〔EQ2〕、〔OF〕に基づくTSP解は、「最小巡回路対応のξ^*に収束する〔OF〕を導出する〔EQ1〕、〔EQ2〕」である。

4. むすび

TSPはニューラルフレームワークの単純特殊形を利用しているにすぎない。ニューラルフレームワークを最大限に活用して、TSPレベルの古典的難問を容易に解決することが期待される。

文　献

(1)Hopfield他: Biol.Cybern.52(1985)

(2)Durbin他: Nature326(1987)

(3)Fort: Biol.Cybern.59(1988)