ファジイＩＳＭにおける推移的結合

6C−7

若林　高明　　大内　東

北海道大学工学部

1．はじめに

ファジイＩＳＭにおける推移的結合とは「共通な推移的ファジイ二項関係を有する二つの多階層サブシステムを一つのシステムに結合する手続き」である．この問題は二つのサブシステムを推移的ファジイ行列AとBで表わし，結合したシステムをMで表わすと，ファジイ可到達行列（正方，反射的かつ推移的ファジイ行列）

$$M=\begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix} \qquad (1)$$

を求める問題となる．ここで，AとBは既知のファジイ可到達行列であり，次数をそれぞれｓとｔとする．XとYは未知の行列であり，XとYをMがファジイ可到達行列となるように区間［０，１］内の値で埋めることがファジイＩＳＭにおける推移的結合の目的である．推移的結合は元来，システム構造化技法のＩＳＭにおける具象化過程の第二フェーズの一般化であるが，以下の状況において重要である．

構造化の対象となるシステムの構成要素が多く一度に全要素を対象として構造化を行うのが困難，或いは幾つかの専門の異なるグループがそれぞれ自分の関係する要素集合について構造化を行う，等の理由でシステム構成要素を部分集合に分割して部分構造化を行い，結果をまとめる場合である．通常の（二値行列を用いた）ＩＳＭにおける推移的結合の理論は，Warfield[1]，大内ら[2]によって提案されているが，本論文ではファジイＩＳＭにおける推移的結合の理論について考察する．

2．諸定義・諸定理

本論文で使用する諸定義・諸定理について述べる．（詳細は文献3)を参照）

・集合XからYへのファジイ二項関係Rとは，直積$X\times Y$上のファジイ集合であり，

$$\mu_R : X\times Y \rightarrow [0,\ 1] \qquad (2)$$

なるメンバシップ関数μ_Rによって特徴づけられる．

特に$X=Y$のときRをX上のファジイ関係という．

・$x_i, x_j, x_k \in X$とする．X上のファジイ二項関係Rが反射的であるとは，

$$\mu_R(x_i, x_i)=1 \qquad (3)$$

Ｒが推移的であるとは，

$$\max_{x_k}[\min\{\mu_R(x_i,x_k),\ \mu_R(x_k,x_j)\}] \le \mu_R(x_i,x_j) \qquad (4)$$

・ファジイ二項関係Rに対して，Rが擬順序（関係）であるとは反射的かつ推移的であるときをいう．

・ファジイ行列Ａ，Ｂに対して次の演算を定義する．

$$(A+B)_{ij}=\max(a_{ij},\ b_{ij}) \qquad (5a)$$

$$(AB)_{ij}=\max_k[\min(a_{ik},\ b_{kj})] \qquad (5b)$$

$$(A \,@\, B)_{ij}=\min_k(a_{ik}\alpha b_{kj}) \qquad (5c)$$

$$\text{但し}\quad a\alpha b=\begin{cases} 1 : a\le b \\ b : a>b \end{cases}$$

$$\overline{A}_{ij}=1-a_{ij} \qquad (5d)$$

［定理］ファジイ行列Mが（ファジイ）可到達行列であるための条件は

$$M=M+I \qquad (6a)$$

$$M^2=M \qquad (6b)$$

3．ファジイＩＳＭにおける推移的結合の理論

（１）式において，行列Mは可到達行列でなければならないから，部分行列A，B，X，Yは以下の条件を満たさなければならない．

$$A^2+XY=A \qquad (7a)$$

$$AX+XB=X \qquad (7b)$$

$$YA+BY=Y \qquad (7c)$$

$$YX+B^2=B \qquad (7d)$$

Ａ，Bが可到達であることより（７）は

$$XY\le A \qquad (8a)$$

$$AX=X \qquad (8b)$$

$$XB=X \qquad (8c)$$

$$YA=Y \qquad (8d)$$

$$BY=Y \qquad (8e)$$

$$YX\le B \qquad (8f)$$

となる．

Transitive Coupling in Fuzzy ISM

Takaaki WAKABAYASHI, Azuma OHUCHI

Faculty of Engineering, Hokkaido University

・Self implication

(8b),(8c)両式より

$$AXB=X \qquad (9a)$$

(8d),(8e)両式より

$$BYA=Y \qquad (9b)$$

行列の列展開，行展開，クロネッカー積⊗を用いると(9)式はそれぞれ

$$c(X)=(B^T\otimes A)\,c(X) \qquad (10a)$$

$$r^T(Y)=(B\otimes A^T)\,r^T(Y) \qquad (10b)$$

とかける[4]。但し，$c(X)$，$r(Y)$ はそれぞれ，X の列を縦に，Yの行を横に並べたものである．即ち，X の第 i 列を c_iとかくと，$c(X)=(c_1^T,\ c_2^T,\ \cdots,\ c_t^T)^T$，$Y$の第 i 行を r_iとかけば，$r(Y)=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_t)$ である．(10a)，(10b)をそれぞれ

$$\mathbf{x}=P\mathbf{x} \qquad (11a)$$

$$\mathbf{y}=Q\mathbf{y} \qquad (11b)$$

とかく．ここで，Xの自己含意行列Pの添字（c_i，c_j^T）の部分ブロック$P^{i,j}$は，A，Bが反射的行列であることから以下の様になる．

$$P^{i,j}=\delta(i,j)A+\bar{\delta}(i,j)\,b_{ji}A \qquad (12)$$

また，$Q=P^T$である。なお，既知の行列A，Bから自己含意行列P，Qを効率的に生成できるアルゴリズムが提案されている[5]．Pの生成アルゴリズムを以下に示す．

（１） 行列Bの転置行列B^Tを求める．

（２） B^Tの対角要素にAを代入する．

（３） B^Tの非対角要素には，その要素とAとの積を代入する．

・Cross implication

(8a),(8f)を行展開，列展開，演算子ⓐを用いてまとめると次のいずれかの形となる[6]．

$$\mathbf{y}^T \leq \mathbf{x}^T ⓐ F \qquad (13a)$$

$$\mathbf{x}^T \leq \mathbf{y}^T ⓐ F^T \qquad (13b)$$

但しFは添字（c_i，r_j）の部分ブロック$F^{i,j}$が以下で表わされる s t 次の正方行列である．

$$F^{i,j}=\delta(i,j)A+\bar{\delta}(i,j)\,(b_{ji}I+\bar{I}) \qquad (14)$$

(16)式の導出は多少複雑であるが，これにより行列Fの効率的生成アルゴリズムを提案することができる．

・Fの生成アルゴリズム

（１） 行列Bの転置行列B^Tを求める．

（２） B^Tの対角要素にAを代入する．

（３） B^Tの非対角要素には，その要素を対角成分とし，非対角成分が１の行列（その要素をIに乗じたものと$\bar{I}$との和）を代入する．

４．未知要素の決定

(11)式に加えて，(13a),(13b)式のうちいずれか一方を用いてXとYの要素の値を決定する．以下の二通りの決定方法が考えられる．

（Ⅰ）①$\mathbf{x}$の要素の値を一つ決める．

②(11a)式を用いて他の$\mathbf{x}$の要素の値を決める．

③(13a)式を用いて$\mathbf{y}$の各要素の取り得る値の範囲を決める．

④(11b)式を満たすように$\mathbf{y}$の各要素の値を決める．

（Ⅱ）①$\mathbf{y}$の要素の値を一つ決める．

②(11b)式を用いて他の$\mathbf{y}$の要素の値を決める．

③(13b)式を用いて$\mathbf{x}$の各要素の取り得る値の範囲を決める．

④(11a)式を満たすように$\mathbf{x}$の各要素の値を決める．

以上の手続きにおいては，必ずしも各要素の値が一つに決まるわけではない．各要素はその取り得る値の範囲のうち任意の値をとることができるので，仮にある値を代入することにより，決定の効率化を図ることができる．

手続き①，②において決定した$\mathbf{x}$（$\mathbf{y}$）に対して手続き③では$\mathbf{y}$（$\mathbf{x}$）の値の範囲がy_j（x_i）$\in[0,\ \beta]$（$0\leq\beta\leq 1$）のように決定するので，この範囲内で④により$\mathbf{y}$（$\mathbf{x}$）の各要素を決定する．$\mathbf{x}=0$または$\mathbf{y}=0$は(11)(13)を満たすので，$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$の組は，必ず解を持つ．

５．おわりに

ファジイＩＳＭにおける推移的結合の方法を提案した．このプロセスにおいて重要な，相互含意行列Fを既知要素を使って表現し，その効率的生成アルゴリズムを提案した．また，XとYの自己含意行列，XからYへの相互含意行列とYからXへの相互含意行列がそれぞれ互いに他の転置行列であるという性質を明らかにした．以上により，未知要素の決定を簡潔に行うことができる．

なお，本研究は文部省科学研究費補助金一般（Ｂ）０１４６０２５３から一部援助を受けた．

［ 文 献 ］

1)J.N.Warfield：“Implication Structures for System Interconnection Matrices”，*ibid.*，SMC-6，18(1976)

2)大内，他：「ＩＳＭの推移的結合における完全推論行列の考察」電学論Ｃ，104，5(昭59)

3)寺野，他：ファジイシステム入門（昭62）オーム社

4)児玉・須田：システム制御のためのマトリクス理論（昭53）計測自動制御学会

5)大内・加地：「ファジイＩＳＭの具象化フェーズにおける相互連関行列の効率的生成アルゴリズム」電学論Ｃ，109，10(平成1)

6)D.Dubois，H.Prade：Fuzzy Sets and Systems Theory and Applications；Academic Press