

# 4C-10 Euclid 距離による凸多角形の多角形領域内への maximin 配置問題とそれに関連した動的 Voronoi 図

今井 浩  
東京大学理学部情報科学科

今井 桂子  
津田塾大学数学科

徳山 豪  
日本 IBM 東京基礎研究所

## 1. はじめに

多角形配置問題とは、与えられた多角形  $P$  を他の多角形  $Q$  の内部に配置するという問題である。この問題は、モーションプランニングとも密接に関係があり、いろいろな面から研究がなされている ([F] や [CK] 参照)。

本稿では、何種類かの Euclid 距離をもちいた多角形 maximin 配置問題を考える。最も基本的な maximin 配置問題は、 $P$  の任意の点と  $Q$  の任意の点の Euclid 距離の最小値が最大となるように凸多角形  $P$  を多角形  $Q$  の内部に配置するという問題である。さらに、 $P$  をいくつか一直線上に並ぶようにして、同様の maximin 配置問題を解くことも考える。直感的に言えば、多角形  $P$  またはそのいくつかのコピーを  $Q$  の境界からなるべく離れるように  $Q$  の内部に置く問題を考えることであると言ってよい。似たような問題に、 $P$  に相似な最大の多角形を  $Q$  の内部に配置するという問題があり、これについては Fortune [F] や Chew と Kedem [CK] で考察されている。しかし、彼らは凸距離関数を用いており、Euclid 距離を用いた問題については、これまでに研究がなされていない。

ここでは、新しい Voronoi 図 (P-Euclid Voronoi 図と呼ぶ) を定義することによってこれらの maximin 配置問題に対する効率の良いアルゴリズムを紹介し、それらの組合せ的複雑度についての解析を行なう。計算複雑度の解析においては、Davenport-Schinzel 列の理論を用いる。

凸多角形の多角形内への配置問題は、地図の中へ地名などを記入するときにも現われる ([AIK])。このような場面では、文字列は長方形で表わされ、領域は多角形で表現される。長方形を、上記の意味での maximin 問題の解となるように多角形の内部に置きたい。また、文字列を1つの長方形として捕らえるのではなく、すでに置かれている文字と重ならないように、かつ、一定の間隔で一列に並ぶように各文字を置くことを考える。このような問題を解くためには、穴のある多角形の内部に正方形のコピーを一定の間隔で配置する問題を考える必要がある。

本稿で扱う maximin 配置問題と得られた結果、また、それに関連してすでに得られている結果をまとめると次のようになる。 $P$  は  $m$  個の辺を持つ凸多角形、 $Q$  は  $n$  個の辺を持つ多角形 (または多角形領域) とする。

との Euclid 距離の最小値が最大となるように凸多角形  $P$  を多角形領域  $Q$  の内部に置く。

問題 (P1) は、平行移動により  $P$  の相似な図形のうち最大のものを  $Q$  の内部に配置する問題と関係が深い。 $P$  の相似な図形で最大のものを配置する問題については  $P$  に関する凸距離関数に対する  $Q$  の Voronoi 図を用いて  $O(mn \log mn)$  の手間で解ける ([F])。 (P1) も  $O(mn \log mn)$  の手間で解ける ([AIIT])。

(P2) 回転と平行移動によって  $P$  の任意の点と  $Q$  の任意の点との Euclid 距離の最小値が最大となるように凸多角形  $P$  を多角形領域  $Q$  内に配置せよ。

(P2) は  $O(m^4 n \lambda_{16}(mn) \log mn)$  の手間で解くことができる。ここで、 $\lambda_{16}(mn)$  は位数 16 の Davenport-Schinzel 列の最大長を表わす。一般に、 $\lambda_s(N)$  は  $N$  にほとんど線形な関数であることがわかっている。

(P3)  $Q$  内に  $P$  の  $k$  個のコピーを次のように配置する。 $P$  のコピーは水平線上に並び、コピー間の距離  $h$  と、 $P$  の任意の点と  $Q$  の任意の点の間の距離の最小値が最大となるようにする。ここで、 $h$  は与えられた定数  $h_0 > 0$  以上であるような変数である。

$k = 2$  と  $k \geq 3$  の場合にそれぞれ問題 (P3) は、 $O(m^2 n^2 \log mn)$ 、 $O(k^6 m^3 n^3 \log kmn)$  の手間で解ける。

## 2. P-Euclid Voronoi 図について

この節では、新しい Voronoi 図 (P-Euclid Voronoi 図) を定義する。凸多角形  $P$  は、 $P$  の内部に参照点  $p$  を持つと仮定する。平面上の点  $q$  に対して、多角形  $P$  の参照点  $p$  が  $q$  の位置に来るように  $P$  を平行移動したものを  $P(q)$  と書く。 $P(q)$  が  $Q$  に含まれるような点  $q \in Q$  の集合のことを  $P$  の  $Q$  内の配置可能領域という。配置可能領域は、境界が多角形であるようないくつかの連結成分から成り、その境界を  $F(P, Q)$  で表わすことにする。

点  $q \in F(P, Q)$  に対して、 $Q$  の点と  $P(q)$  の点の間の Euclid 距離の最小値を  $d_P(Q, q)$  で表わす。また  $d(F, q)$  は  $F(P, Q)$  の点と  $q$  の間の Euclid 距離の最小値を表わすとすると、 $d_P(Q, q) = d(F, q)$  が成り立っている。

配置可能領域  $F(P, Q)$  に対し、Euclid Voronoi 図を考え、これを P-Euclid Voronoi 図と呼ぶことにする。P-Euclid Voronoi 図の組合せ的複雑度は  $O(mn)$  であり、 $P$  に関する凸距離関数による  $Q$  の Voronoi 図を利用して、 $F(P, Q)$  を  $O(mn \log mn)$  の手間で構成することができる ([F] 参照)。

多角形の頂点や辺を face と呼ぶことにする。P-Euclid Voronoi 図とは、 $Q$  の face に対して、その face と  $P(q)$  との距離が  $Q$  の他の face に対する距離より小さいような  $q$  の集合を  $Q$  のその face の Voronoi 領域とするような Voronoi 図と同じである。

## 3. 平行移動と回転を用いた maximin 配置問題

問題 (P1) においては、P-Euclid Voronoi 図を求めることにより、問題を解くことができる。しかし、 $P$  の向きが変わるとき、配置可能領域それ自身が変化し、P-Euclid Voronoi 図は動的に変わってゆく。問題 (P2) をこの P-Euclid Voronoi 図を使って解くために、この動的 P-Euclid Voronoi 図について調べなければならない。

$P$  を参照点  $p$  を中心として  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 回転したものを  $\tilde{P}(\theta)$  と書くことにする。配置可能領域  $F(\tilde{P}(\theta), Q)$  の点  $q$  に対して、参照点  $p$  が  $q$  の位置に来るように  $\tilde{P}(\theta)$  を平行移

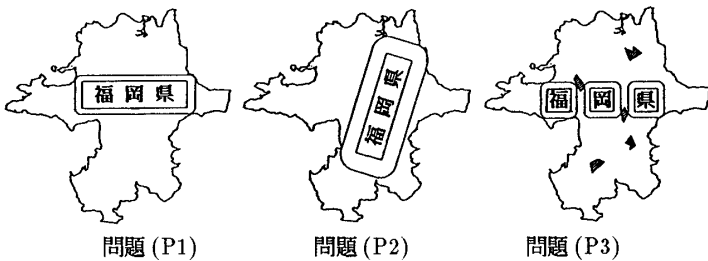


図 1. 地図に地名を配置する問題

(P1) 平行移動だけを用いて  $P$  の任意の点と  $Q$  の任意の点

Euclidean Maximin Polygon Containment Problems and Related Dynamic Voronoi Diagrams

Hiroshi Imai\*, Keiko Imai\*\*, Takeshi Tokuyama\*\*\*

\*University of Tokyo, \*\*Tsuda College,

\*\*IBM Research, Tokyo Research Laboratory

動したものを  $\tilde{P}(\theta, q)$  で表わす。

Voronoi 辺上に  $P(\theta)$  の参照点を置くと、 $\tilde{P}(\theta, q)$  の任意の点と  $Q$  の任意の点と距離の最小値をとる点の組は、2組ある。それらの点は、 $P$ 、 $Q$  の face 上にある。このときの  $P$  の face を  $r$ 、 $r'$ 、 $Q$  の face を  $s$ 、 $s'$  とした時、 $(r, s)$  と  $(r', s')$  は、その Voronoi 辺を支持すると言うことにする。 $r$  と  $r'$ 、 $s$  と  $s'$  は一致するかもしれない。 $r = r'$  となる時は  $r$  は  $P$  の1つの頂点であり、 $s = s'$  となる時は  $s$  は  $Q$  の1つの凹頂点となっている。そこで、Voronoi 辺を支持する組が、 $\tilde{P}(\theta, q)$  の頂点と  $Q$  の2つの face である時、または、 $\tilde{P}(\theta, q)$  の2つの face と  $Q$  の凹頂点である時、 $q$  を通っている Voronoi 辺を proper edge と言うことにする。proper edge に接続する Voronoi 点を proper Voronoi 点という。一方、Voronoi 辺や頂点が proper でないとき、improper であるという。

$\tilde{P}(\theta)$ -Euclid Voronoi 図の組合せ的複雑度 (Voronoi 点の位相の変化の回数) を評価する。複雑度の評価は、次の2つのステップで行なう。step 1では、proper Voronoi 点の位相の変化の回数を数え、その後、step 2で improper Voronoi 点の位相変化を評価し、全体の複雑度を求める。

(step 1) step 1 では proper Voronoi 点の位相変化を調べる。proper edge には、次の4つのタイプがある。

- (1)  $P$  の頂点と  $Q$  の2つの辺で支持される proper edge
- (2)  $P$  の頂点とそれに隣接する  $P$  の辺と  $Q$  の凹頂点で支持される proper edge、または、 $P$  の頂点と  $Q$  の凹頂点とそれに隣接する  $Q$  の辺で支持される proper edge
- (3)  $P$  の頂点と  $Q$  の凹頂点とそれには隣接していない  $Q$  の辺で支持される proper edge
- (4)  $P$  の頂点と  $Q$  の2つの凹頂点で支持される proper edge

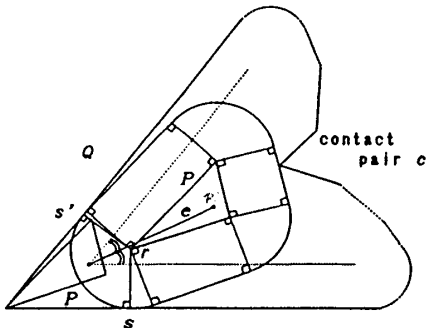


図2. タイプ(1)の proper edge  $e$  と支持する  $(r, s)$  と  $(r', s')$

Voronoi 辺  $e$  がタイプ(1)の proper edge であるとき、 $Q$  の2つの支持辺を  $s$  と  $s'$  と書くことにする(図3参照)。 $P$  の face と  $Q$  の face の組  $c$  に対し、 $r$  と  $s$  との距離、 $r$  と  $s'$  との距離、それに  $\tilde{P}(\theta, q)$  と  $q$  の接する組  $c$  の間の距離が等しくなるように  $q \in F(\tilde{P}(\theta), Q)$  を取ったとき、その距離  $\delta$  の最小値で関数  $d_c(\theta)$  を定義する。図3は、接している組が、 $\tilde{P}(\theta, q)$  の辺と  $Q$  の凹頂点である場合の例である。 $C$  は、 $P$  の頂点または辺と  $Q$  の頂点または辺のすべての組の集合を表わすとし、次のような関数を定義する。

$$d_C(\theta) = \min_{c \in C} d_c(\theta)$$

もし、接している組  $c$  に対する  $d_c$  が  $d_C$  の最小値を取るとすると、この  $c$  と  $p^*$ 、 $s$  と  $s'$  は proper Voronoi 点を定める。 $\theta$  が変わるにつれ、最小値も変化する。 $d_C$  は Davenport-Schinzel 列を用いて、 $d_c(\theta)$  ( $c \in C$ ) の下側エンベロップから求める。Davenport-Schinzel 列に関する理論から、 $d_C$  の組

合せ的複雑度は  $O(\lambda_{16}(mn))$  であることがわかる。このことから、proper Voronoi 点の位相変化の回数は  $O(mn\lambda_{16}(mn))$  であることがいえる。

(step 2) step 2 では、improper Voronoi 点の変化について調べる。P-Euclid Voronoi 図から、proper edge と proper Voronoi 点を取り除いた、improper edge と improper Voronoi 点からなる各連結成分の組合せ的複雑度は、 $O(m)$  である。この事と、配置可能領域自身の位相的变化や proper edge の位相的变化による影響等を考慮すると、improper Voronoi 点の位相変化の回数は、 $O(m^4 n \lambda_{16}(mn))$  であることがわかる。

更に考察を続けると、 $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) が変化するときの  $\tilde{P}(\theta)$ -Euclid Voronoi 図の組合せ的複雑度も、 $O(m^4 n \lambda_{16}(mn))$  であることが証明できる。

アルゴリズムとしては、配置可能領域の位相の変化をすべて求めた後、データ構造としてヒープを用いて、平面走査法を使って問題(P2)を解く。

定理1.  $\tilde{P}(\theta)$ -Euclid Voronoi 図 ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) の組合せ的複雑度は、 $O(m^4 n \lambda_{16}(mn))$  であり、従って、問題(P2)は  $O(m^4 n \lambda_{16}(mn) \log mn)$  の手間で解くことができる。

#### 4. 問題(P3)について

パラメタ  $h$  を固定した場合は、 $k$  個の  $Q$  を  $h$  ずつ平行にずらして置き、それらの共通部分を求める。そして、その共通部分に対して問題(P1)を解けば求める解が得られる。 $h$  が定数ではないときは、 $Q$  の  $k$  個のコピーがパラメタ  $h$  で動いている場合の動的 P-Euclid Voronoi 図について調べなければならない。これを行うことにより、問題(P3)を解くと、次の定理が証明できる。

定理2. 問題(P3)は、 $k = 2$  の時  $O(m^2 n^2 \log mn)$  の手間で、 $k \geq 3$  の時  $O(k^6 m^3 n^3 \log kmn)$  の手間で解くことができる。

#### 5. おわりに

本稿では、凸多角形の多角形領域内への maximin 配置問題における何種類かの問題の解法と、それに関連した動的 Voronoi 図の組合せ的複雑度について述べた。凸多角形の多角形領域内への maximin 配置問題は、いろいろな方面から研究されている興味深い問題である。この多角形配置問題を解くためには、動的 Voronoi 図についての研究が不可欠であった。この動的 Voronoi 図に関する研究は最近始められたばかりで、解かなければならない問題が数多く残っている。また、今回見てきたように、多角形の配置問題というような実際的な問題に深く関わっている。そういった意味でも、動的 Voronoi 図に関する研究は興味がある。

本研究の一部は、文部省科学研究費によるものである。

#### 参考文献

- [AIT] H. Aonuma, H. Imai, K. Imai and T. Tokuyama: Maximin location of convex objects in a Polygon and related dynamic voronoi diagrams. *Proc. 6th ACM Symp. on Computational Geometry*, 1990.
- [AIK] H. Aonuma, H. Imai and Y. Kambayashi: A visual system of placing characters appropriately in multimedia map databases. In "Visual Database Systems" (Proc. the IFIP TC2/WG2.6 Working Conf. on Visual Database Systems), North-Holland, 1989, pp.525-546.
- [CK] L. P. Chew and K. Kedem: Placing the largest similar copy of a convex polygon among polygonal obstacles. *Proc. 5th ACM Symp. on Computational Geometry*, 1989, pp.167-174.
- [F] S. Fortune: Fast algorithms for polygon containment. *Proc. 12th ICALP, Lecture Notes in Computer Science* 194, Springer-Verlag, 1985, pp.189-198.