4Ｃ−8

構造化超グラフに関する研究
-共通要素を持つ部分グラフ群の同時階層化-

成瀬　継太郎　　嘉数　侑昇
北海道大学

１．はじめに

工学諸問題に限らず種々の実際的問題において関係が付与されたシステムの構造を解析するうえで，グラフを用いた関係表現は広く用いられているものであり，その有用性は高い．ところが，階層的構造を持つ問題に対しそれをグラフで表現することは必ずしも容易ではない．

グラフに基づく階層表現の従来のアプローチの１つに，構造化超グラフ[1]がある．これは，部分超グラフのノード化とその復元，および異なった階層レベル間の関係を表現することが可能である．　しかし，この構造化超グラフでは部分超グラフのノード化は逐次的であり，同時に複数の部分超グラフをノード化することができない．

本研究では，前述の問題点を解決する一般化超グラフの構築を目的とする．また，計算機上に実現することによってこの一般化超グラフの操作を確認する．

２．超グラフ

階層化超グラフの基本となる超グラフと部分超グラフ，境界超枝集合を定義する．

【定義２．１】

Ｖを頂点の有限集合とし，ＥをＥ$\subset 2^V$の条件を満たす超枝の有限集合とする．このとき，Ｈ＝（Ｖ，Ｅ）を超グラフと呼ぶ．

【定義２．２】

Ｈ＝（Ｖ，Ｅ）とＨ′＝（Ｖ′，Ｅ′）を２つの超グラフとする．Ｈ′が以下の条件を満たすときＨ′をＨの部分超グラフという．

$V' \subset V \quad E' \subset E$

【定義２．３】

Ｈ＝（Ｖ，Ｅ）を超グラフ，Ｈ′＝（Ｖ′，Ｅ′）をＨの部分超グラフとする．Ｈ′の境界超枝集合ＢＨ（Ｈ′）を以下のように定義する．

$$BH(H') = \{e \in (E \setminus E') \mid v \in e,\ v \in V'\} \tag{1}$$

３．抽象化と詳細化の記述

超グラフの階層化は部分超グラフを頂点で置換する操作である抽象化と，またこれとは逆に頂点を部分超グラフで拡張する操作である詳細化の二つの操作により実現される．

まず，部分超グラフを頂点で置換して生成される変形超グラフを以下のように定める．そして，この変形超グラフを生成する操作を抽象化（Ａｂｓ）と呼ぶ．

【定義３．１】

Ｈ＝（Ｖ，Ｅ）を超グラフ，また$H_i' = (V_i', E_i')$ i=1,2,…,nをｎ個のＨの部分超グラフとする．このとき，Ｈの部分超グラフH_i'をx_iで置換することによって定義される変形超グラフ$H^{(R)} = (V^{(R)}, E^{(R)})$を以下のように定義する．

$$V^{(R)} = (V \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V') \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}) \tag{2a}$$

$$E^{(R)} = E_v^{(R)} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} E_{xi}^{(R)}) \tag{2b}$$

$$E_v^{(R)} = \{e \in E \mid v \in e,\ v \in V^{(R)}\} \tag{2c}$$

$$E_{xi}^{(R)} = \{e \mid e = \{x_i\} \cup (\bigcup_{j=1}^{n} \{x_j \mid v \in V_j\}) \cup \{v \mid v \not\in \bigcup_{j=1}^{n} V_j\} \tag{2d}$$

where,

$v \in e',\ e' \in (e'' \setminus V_i),\ e'' \in BH(H_i)$

また，このとき同時にH_iについての境界結合写像ϕ_iを以下のように定める．

【定義３．２】

$$\phi_i(e) = \{e' \mid e' \in BH(H_i)\} \tag{3}$$

where, $e \in E(H^{(R)})$．

一つの超グラフの複数の部分超グラフに対して，異なった境界結合写像ϕ_iを定義する事によって，共通部分を持つ部分超グラフを扱う事が可能になる．

次に，変形超グラフとは逆に，超グラフの頂点を超グラフで拡張した拡張超グラフを定め，この拡張超グラフを生成する操作を詳細化（Ｒｅｆ）と呼ぶ．

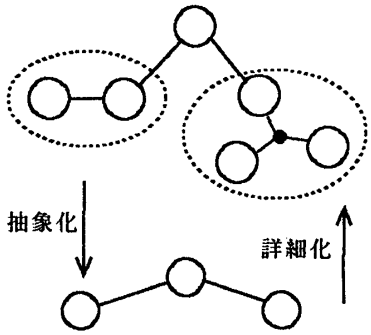


図１　抽象化と詳細化

【定義３．３】

Ｈ＝（Ｖ，Ｅ）を超グラフ，x_i (i=1,2,…,n)をＨのｎ個の頂点，$H_i' = (V_i', E_i')$をｎ個の超グラフ，ϕ_iをｎ個の境界結合写像とする．x_iをH_i'で拡張することによって定義される拡張超グラフ$H^{(E)} = (V^{(E)}, E^{(E)})$を以下のように定義する．

A Study on a Structured Hypergraph
- A Concurrent Hierarchical Organization
with a Hypergraph Representation -
Keitarou Naruse, Yukinori Kakazu
Hokkaido University

$$V^{(E)}=V\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_i'\right)\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right)\tag{4a}$$

$$E^{(E)}=E_v^{(E)}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_{xi}^{(E)}\right)\tag{4b}$$

$$E_v^{(E)}=\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)$$

$$\cup\left\{e \mid e\in E,\ v\in e,\ v\notin\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\right\}\tag{4c}$$

$$E_{xi}^{(E)}=\{e \mid e=\phi_i(e'),\ e'\in E\}\tag{4d}$$

【定理3．1】

$H=(V,E)$の変形超グラフを$H^{(R)}=(V^{(R)},E^{(R)})$，拡張超グラフを$H^{(E)}=(V^{(E)},E^{(E)})$とすると，

$Abs(H)=(H^{(R)},\phi_i)$

$Ref(H,\phi_i)=H^{(E)}$

【証明】

まず，$V^{(R)}$と$E^{(R)}$，ϕからVとEを導く事ができる事を示す．Vについては，(2a)より明か．Eについてであるが，$E^{(R)}$は$E_v^{(R)}$と$E_{xi}^{(R)}$に大別される．$E_v^{(R)}$はEの部分集合である．また，$E\setminus E^{(R)}$は$E_{xi}^{(R)}$に変更されるが，この集合の要素はϕ_iによって保存される．従って，$E^{(R)}$からEを導く事ができる．$H^{(E)}$からHについても同様．

この定理により，抽象化と詳細化においては元の超グラフの情報が保存される事が示される．また，上の定義においてn=1の場合は従来の構造化超グラフでの定義と等価である．

4．一般化超グラフの定義

前章で定義した抽象化と詳細化を繰り返し行うことによって，超グラフの階層化を実現することが可能になる．本章では，この二つの操作を有効に適用することを可能にする一般化超グラフという構造を定義する．

【定義4．1】

$\gamma=(H,B,\mu)$を，一般化超グラフと呼ぶ．

where, $H=\{H_i\}$　$i=0,1,\cdots,n$

$\mu(H_i)=x_j\in V(H_j)$　$j\neq i$

$B=\{B_k=(I_k,BH(H_k),\phi_k)\}$ $k=1,2,\cdots,n$

$I_k=\{e \mid x_k\in e\}$

次に，一般化超グラフに親子関係を定める．

【定義4．2】

$H_j=(V_j,E_j)$を超グラフ，$H_{ji}=(V_{ji},E_{ji})$をH_jのn個の(i=1,2,…,n)部分超グラフとし，かつ

$\mu(H_{ji})=x_{ji}\in V(H_j)$

を満たすとき，H_jはH_{ji}の親超グラフと呼ばれ，逆にH_{ji}はH_jの子超グラフと呼ばれる．

この親子関係は半順序であり，これにより異なる抽象化レベルを表現することが可能となる．以下に一般化超グラフについて，いくつかの定理を示す．

【定理4．1】

親子関係がトリー構造をなすとき，γは構造化超グラフと等価である．

【証明】

構造化超グラフでは，共通部分を持つ複数の超グラフを同時に抽象化することはできない．そのためH_iはただ一つの親超グラフを持つ．従って，親子関係がトリー構造になるときは，γは構造化超グラフと等価である．

【定理4．2】

各々の抽象化レベルでの超グラフが連結であるための必要条件は，最下位の抽象化レベルの超グラフが連結であることである．

【証明】

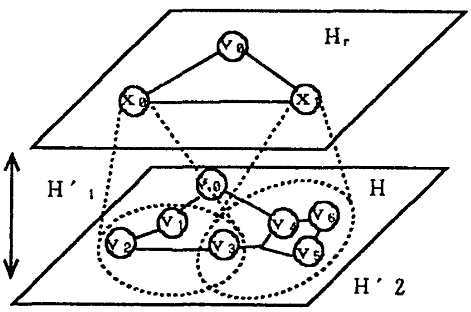
連結超グラフと任意の部分超グラフによって定義される変形超グラフは，連結である．なぜなら，変形超グラフは部分超グラフを頂点で置換するが，部分超グラフに連結している超枝は置換される頂点に連結されるからである．従って，最下位の抽象化レベルの超グラフが連結であるならば，任意のレベルの超グラフは連結である．

5．計算機による実行例

計算機による実行例によりこの一般化超グラフの操作を確認する．図2に一般化超グラフに抽象化と詳細化を行った結果を示す．ここでは，超枝はリストで表現されている．

```
H'0:
hyperarc
v1->v2
v2->v3
```

```
H'1:
hyperarc
v3->v4->v5
v4->v5
v4->v6
v5->v6
```




```
Hr:
hyperarc
v0->x0
phai
v0->v1
v0->x1
phai
v0->v4
x0->x1
phai
v2->v3
v3->v4->v5
```

```
H:
hyperarc
v0->v1
v0->v4
v1->v2
v2->v3
v3->v4->v5
v4->v5
v4->v6
v5->v6
```

図2　計算機による実行例

6．おわりに

複数の部分超グラフが共通部分を持つ場合の抽象化（ノード化）と詳細化を可能にする一般化超グラフを提案した．また，この一般化超グラフを計算機上に実現し，計算機による実行例を示した．

参考文献

1）　Anoca,M.,De Floriani,L.: A hypergraph-based hierarchical data structure and its applications, Adv.Eng.Software,Vol.11,No.1,p2-p11(1988).