3P－8

Descartes符号律の図形処理への一応用

応江黔 杉江 昇
名古屋大学

1．まえがき

曲線などを対象とする幾何学的情報処理において，非線型計算（代数方程式を解くことなど）がしばしば問題になる．しかし，場合によってはこれをうまく避けることができる．本文は，平面上で代数曲線の断片（以下は曲線分とよぶ）を境界とする領域に対して，ある任意の点がこの領域の内部に在るかまたは外部に在るかを計算するアルゴリズムを考える．

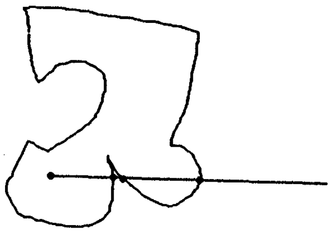

図1

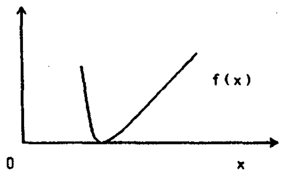

図2．1）

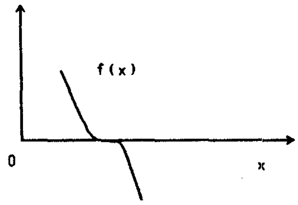

図2．2）

図1に示すように，一般的には，点Pから引いた半直線ℓが境界に奇数個の点で交わるとき点Pが領域内に在る．故に，各曲線分について交点数の奇偶性を計算すればよい．以降はDescartesの符号律による計算法を述べる．

2．Descartesの符号律

定理：実数係数方程式　$f(x)=a_0+\cdots a_d x^d=0$　の正実根の数（重複度を含めて）をrとし，数列a_0，…a_dの正負符号変化数（0はとばして）をvとすれば，$r\equiv v \pmod 2$．　（文献〔2〕）

この符号律により，曲線$F(x, y)=0$　がX-軸上の区間(a, b)と交わる点の数（重複度を含めた）をIとし，$f_a(x)=F(x-a, 0)$と　$f_b(x)=F(x-b, 0)$の係数の符号変化数をそれぞれv_aとv_bとすれば，$I\equiv v_a - v_b \pmod 2$．但し，$F(a, 0)\neq 0$，$F(b, 0)\neq 0$と仮定する．この重複度を含めた交点数が丁度本文の問題の解決に相応しいことは次の解析から分かる．

x_0を$F(x, 0)$のr重根とすると，

$$f(x)=F(x, 0)$$
$$=a_r(x-x_0)^r+a_{r+1}(x-x_0)^{r+1}+\cdots$$

となる．図2．1），2）で示すように，rが偶数であるとき，X-軸の摂動により点$(x_0, 0)$の近くにおける真の交点数は0か2となり，rが奇数である場合は相

An Application of Descartes' Rule of Signs to Computer Graphics
Jiang Qian YING and Noboru SUGIE
NAGOYA UNIVERSITY

変わらず１である．故に，区間（a，b）に交わる点の重複度を含めた数は，点がaからbまで動く途中で曲線を横断的に通過する回数と奇偶性が一致する．

３．曲線分の表現

図３に示すように，曲線分を曲線のある長方形に含まれる部分と表現できる．（長方形の代わりに三角形あるいは一般の凸多角形を用いてもよいであろう．）この表現に対して３つの条件を要求する：第一，長方形の中には曲線の表現されるべき連続な部分（曲線分）だけが含まれる．第二，曲線分は端点以外の点が長方形の境界を除いた内部に入っている．第三，曲線分の上に曲線の分岐点（特異点の一種）がない．

明らかに，これらの条件は容易に満たされる．

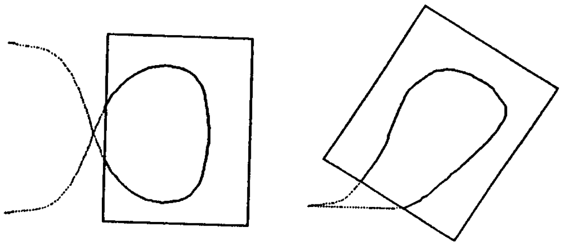

図３

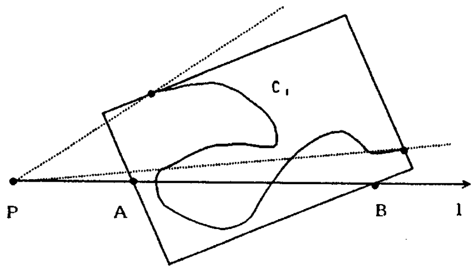

図４

４．交点数の奇偶性の計算

まず，点Ｐから境界の頂点（曲線分の端点）を通らない半直線ℓを引く．座標変換によりℓをＸ-軸にする．ℓと各曲線分C_iとの重複度をこめる交点数をI_iとすると，I_iは次のように計算する：

図４に示すように，C_iを囲む長方形に含まれるℓの一部分を線分ＡＢとする．Ａ，Ｂの横座標をそれぞれa，bとする．座標変換後のC_iの方程式を　$F_i(x, y)=0$とし，式$f_a(x)=F_i(x-a, 0)$と$f_b(x)=F_i(x-b, 0)$の係数の符号変化数をそれぞれv_a，v_bとすると，$I_i \equiv v_a - v_b \pmod 2$．

故に，ℓが領域の境界を通過する回数の奇偶性は$I \equiv \Sigma_i I_i \pmod 2$で分かる．以上の計算は線型座標変換及び直線と直線の交点の算出などの有理演算だけで済むことは明らかであろう．

５．むすび

本稿で討論した問題は単純なものとは言え，この例は，幾何学的情報処理の分野で数学の定理また考え方を十分に活用することによって，簡潔な計算法が得られるということを示している．

参考文献：〔１〕中前栄八郎：コンピュータグラフィクス，オーム社，１９８７．
〔２〕高木貞治：代数学講義，共立出版，１９６５．

謝辞：　本稿の作成にあたってお世話になった名大・杉江研究室の松崎さん及び他の諸氏に感謝致します．　著者の一人・応は日頃に幾何学の勉強を励ましてくださる名大数学科森重文先生に感謝致します．