7K-4

任意の次数の自由曲線と平面の干渉計算方法

(株) リコー　ソフトウェア研究所
藤沢伸子，高村禎二

1　はじめに

今日,コンピュータの性能向上に伴い，CAD(Computer Aided Design) のシステムでは図面データを扱う２次元CADだけでなく３次元モデルを扱う３次元CADが普及しつつある．

３次元CADで形状を作成する操作で，立体と立体の集合演算は重要な操作である．境界表現を用いたモデラーの立体間の集合演算はその立体の面と面の干渉線を求めることによって実現されるが [1]，面-面の干渉線を求めるためには，その境界線の端点を求めるための面-線干渉計算が重要である．しかし,高次の自由曲線，自由曲面の干渉計算を安定に行うことは難しかった．

我々は,任意の次数の自由曲線，自由曲面を含む立体の干渉計算を行う収束性の良い方法を実現した．この方法のことを以下，幾何的Newton-Raphson 法と呼ぶことにする．本論文では，まず面-面の干渉計算においてどのように面-自由曲線の干渉計算が使われるかを簡単に述べ，次に，平面-自由曲線間の交点の計算方法について述べる．

2　面-面の干渉計算で用いる面-線干渉計算

曲面と曲面の干渉線を求める方法には，以下に挙げる方法が知られている [2]．

解析的方法　２つの曲面の式の連立方程式を陰関数で表わしそれを解く [3]．

多面体近似法　曲面を多面体で近似し，近似した多面体どうしの干渉計算を行う．

marching 法　干渉線の開始点を得て，その点から追跡ベクトルを微小区間ずつ伸ばしながら全体の干渉線を得る．

再帰分割法(*recursive subdivision*)　曲面を包含するバウンディング・ボックスどうしの干渉を考え,その内部が平面に近似できるまで小さくしてから干渉線を求める [4]．

我々は marching 法を採用したが，この方法は曲面の偏微分ベクトルと法線ベクトルおよび干渉線の計算は曲面の種類に関係なく行うことができる上に,追跡ベクトルの長さを変えることにより干渉線の精度を調整できる点などが他の方法より優れている．

marching 法では干渉計算の開始点を求めるということが重要である．多くの開始点は,一方の立体の稜線と,もう一方の立体の面との交点である．つまり立体どうしの干渉計算には,面-線干渉計算がかなりの回数行われることとなる．

ここで，例えば高次の NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)曲面と平面の交線計算を行うためにその開始点を計算するには高次の有理曲線と平面の交点の計算が必要である．

面-線の干渉計算のうちいくつかはよく知られた方法で簡単に実現できる．例えば,

- 円錐と直線の場合は２次方程式を解く．(図１)
- 平面と円の場合は,
  1. 平面とａｒｃ面(円がのる面)が平行の場合
     交点を持たない,又は円は平面上にあるため,この円自身を交線とする．
  2. 平面とａｒｃ面が平行でない場合
     平面とａｒｃ面の交線を求め,この直線と円との交点を求める．

の様にして求められる．

しかし，n 次の自由曲線には，上の場合のような解析的に解く方法の適用は難しい．

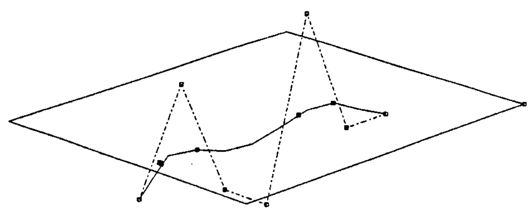

図１　６次のBezier 曲線と平面の干渉点

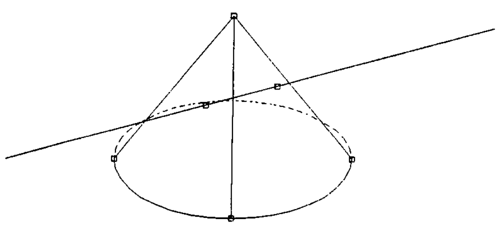

図２　円錐と直線との干渉

Geometric Method to Find the Intersection of an Arbitary Degree Parametric Curve with the Plane
Nobuko FUJISAWA, Teiji TAKAMURA
Ricoh Co.,Ltd

3 自由曲線と平面の干渉

従来,高次の自由曲線を含む面-線間の交点は面や線を格子にわけたり,面と線の式を連立して得られる n 次の方程式を解いて求めていた．例えば，点 $\mathbf{P}_0$ を通り，法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つ平面と n 次の自由曲線$\mathbf{C}(t)$ の交点を求めるには,

$$(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}(t)) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1}$$

を解けばよい [5]．これは t に関する n 次の方程式になる．5 次以上の方程式の解析的解法は存在しないため,高次の曲線の場合は Newton-Raphson 法などの数値解法を用いるが,この計算は不安定であるという問題があった.

この問題を解決するために我々は幾何学的 Newton-Raphson 法を利用した.

任意の次数の自由曲線と平面の交点を一般的かつ安定に求めるには，効率を上げるため,自由曲線の次数が 4 次以下の場合は解析的解法を用い，5 次以上の場合は幾何学的 Newton-Raphson 法を用いることにした．以下にそれらの方法について述べる.

1. 解析的解法

   (1) 式を解く.

2. 幾何学的 Newton-Raphson 法

   (a) 曲線 $\mathbf{C}(t)$ を i 個に分割する点を $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_i$ とし線分 $\mathbf{d}_0\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1\mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{i-1}\mathbf{d}_i$ を $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_i$ とする．線分 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_i$ と平面 $\mathbf{P}$ との交点 $\mathbf{p}$ を本解法の開始点とする．このとき図 3 の様に曲線としては交点を持つが,線分にすると交点を持たなくなる場合でも交点が求まるために線分 $\mathbf{l}_i$ の両端を適当な割合で延長しておく.

   (b) 曲線の方程式を$\mathbf{C}(t)$とし,$\mathbf{C}(t_0)$ とその点における一次微分値$\mathbf{C}'(t_0)$ を求め,$\mathbf{C}(t_0)$ を通り方向ベクトルを持つ直線 $\mathbf{l}'$ を考える．この直線 $\mathbf{l}'$ と平面 $\mathbf{P}$ との交点を求めそれを $\mathbf{Q}$ とする．このとき次の式が成り立つ.

   $$\mathbf{Q} - \mathbf{C}(t_0) = \Delta t \mathbf{C}'(t_0) \tag{2}$$

   (2)式より Δt を求める．ただし,(2) 式を x, y, z について解くと安定した解が求められないので，式の左右両辺と$(\mathbf{Q} - \mathbf{C}(t_0) + \mathbf{C}'(t_0))$ の内積をとることにより Δt を得る．これは Δt に関する 1 次式であるので安定に解が求まる.

   (c) $t_0 + \Delta t$ を t とし,この値を新しい開始点として (b) を決められた誤差の範囲で $\mathbf{Q} = \mathbf{C}(t_0)$ になるまで繰り返す．この時の t_0が曲線 $\mathbf{C}(t)$と平面 $\mathbf{P}$ の交点 $\mathbf{p}$ である.

このアルゴリズムの中で収束性に関係しているのは(2)式のΔt を求めるステップであるが，(2)式は Δt に関する一次式なので,安定に解を求めることができ,収束性が良い．また，本手法はパラメーター値を与えて曲線上の座標値及び微分値を求めることさえできれば，曲線の形によらないので一般的な方法である.

本手法は，形状のもつ幾何的特性を利用することにより．さらにいろいろなケースに拡張することが可能である．例えば，2 次曲面と自由曲線の交点計算 [6] や，自由曲面と円弧，自由曲面と自由曲線の交点計算などに応用可能である．自由曲線と平面の交点を計算しそれを開始点とすることにより自由曲面の等高線を描いた例を図 4 に示す.

4 まとめ

幾何学的 Newton-Raphson 法を任意の次数の自由曲線 (多項式曲線および有理多項式曲線) と平面との交点計算に適用して，交点計算を安定に行うことができるようになった．この手法は，(株)リコーで開発した 3 次元ソリッドモデラー **DESIGNBASE** 上でインプリメントされ，効果が確認された．この交点を開始点として，任意の次数の自由曲面(多項式曲面や有理曲面) と平面の交線を計算することができる．また,自由曲面どうしの干渉計算の収束計算も，本論文で述べた方法を拡張することで実現が可能である.

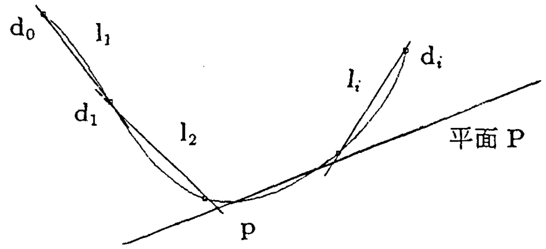

図 3 自由曲線と平面との干渉点

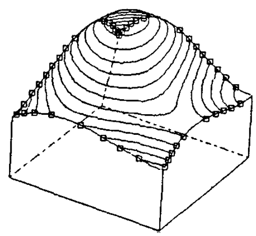

図 4 曲面と (z = 0.2 * i) の平面との干渉線

References

[1] Chiyokura H., "*Solid Modeling with DESIGNBASE*", Addison-Wesley, 1988

[2] Pratt M. J. and Geisow A. D., "Surface/Surface Intersection Problems", *THE MATHEMATICS OF SURFACES*, Clarendon Press, 1986

[3] Sederberg T. W., "Implicit and Parametric Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Ph. D. Thesis, Purdue University, 1983

[4] Koparkar P. A. and Mudur S. P., "Generation of continuous smooth curves resulting from operations on parametric surfaces patches", *CAD*, vol. 18, num. 4, may 1986

[5] Chandru V. and Kochar B. S., "Analytic Techniques for Geometric Intersection Problems" *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, 1987.

[6] O'Neill.A.G,Takamura.T, "Geometric method to find the intersection of a general parametric curve with the natural quadrics" 情報処理学会第 39 回全国大会, 1989.