最少例外世界に着目した条件論理の証明について

5C-9

森 有一　森馬 純一　馬場口 登　手塚 慶一
大阪大学　工学部

1. まえがき

現在あるほとんどの知識処理システムの知識表現及び推論機構は標準論理（命題，一階述語論理）を基礎にしている．標準論理では不完全な知識を取り扱えないことが知られており，知識処理システムの高度化に向けて，例外を含む知識などの不完全な知識の処理が不可欠な要素となる．そこで本稿では，例外的な知識をも扱える推論メカニズムを実現しうる論理の一つである条件論理（Conditional Logic）[1]を対象とした証明手続きを提案する．Groeneboerが示した条件論理の証明手続き[2]は，条件論理式の前提集合と証明すべき式の否定を共に満たす可能世界は存在しないことを示すため，全ての世界とその到達関係を網羅的に調べる手続きである．これに対し，本手続きは，条件論理の解釈における重要な概念である最少例外世界(Simplest World)に着目し，その世界において満足される標準論理式を求めることにより効率的な証明を可能にしている．

2. 条件論理の概要

条件論理は標準論理の世界に二項演算子“⇒”を導入して，拡張したものである．条件論理において⇒は例外を許す演算子として扱われる．またA⇒Bは「Aならば通常Bである」と解釈される．A→BとA⇒Bとの違いは，A→BではAは完全にBに含まれるのに対し，A⇒BではBに含まれないAの例外的な事項が存在しうる．よって例外性の概念を条件論理は扱うことができる．

条件論理は可能世界意味論によって解釈される．可能世界とは起こり得る状況を示し，A⇒Bの真理値は，どの可能世界がどの様な到達関係で結ばれているかで決定される．条件論理で扱う到達関係は，ある世界から少なくとも同様に例外のない世界への到達関係である．ここで，世界w1から世界w2へ到達可能であることをE(w1,w2)と書くと，条件論理における到達関係は以下を満足する．

【定義1】（到達関係の性質）

反射則　：全ての世界wに関してE(w,w)である．
前方結合則：E(w1,w2)かつE(w1,w3)であるならば，
　E(w2,w3)またはE(w3,w2)である．
推移則　：E(w1,w2)かつE(w2,w3)であるならば，
　E(w1,w3)である．□

ここで条件論理式の真偽を判定する世界を基準世界w*と呼ぶと，A⇒Bが真なる条件は以下のように定義される．

【定義2】（条件論理式の解釈）

A⇒Bが真である必要十分条件は

(i) E(w*,w1)かつAとBが共に真なるw1が存在し，かつ
　E(w1,w2)なる全てのw2においてA→Bが真である．
(ii) E(w*,w3)なる全てのw3において，¬Aが真である．□

以後混同を招く恐れがないときに限り，基準世界から到達可能であることを単に到達可能であるという．

3. 最少例外世界

Raven(x)⇒Black(x), Raven(x)∧Albino(x)⇒¬Black(x) という2つの式があるとき，条件論理では，Raven(Pon)という式から¬Albino(Pon)∧Black(Pon)と推論することができ，人間に近い推論を定式化するものであるといえる．この推論過程を非例外性の概念を使って説明すると，最も非例外的であるカラスは，白子でなく黒いので，¬Albino(Pon)∧Black(Pon)であると結論するのである．換言すると，カラスが存在する最も非例外的な世界（最少例外世界）を想定し，推論を行っているのである．

以上より条件論理における推論とは，最少例外世界の状態を決定することに等しいと考えられる[3].以下に最少例外世界の定義を述べる．この定義はE(w1,w2)であるとき，世界w2は世界w1より少なくとも同様に非例外的であることを基にしている．

【定義3】（最少例外世界）

世界wが，標準論理式Aの真なる最少例外世界であるための必要十分条件は，E(w,w1)なる全てのw1について，(i)または(ii)を満足することである．

(i) w1においてAが真であるならば，w1も同様にAの真なる最少例外世界である．
(ii) w1においてAが偽であるならば，E(w1,w2)なる全てのw2においてAは偽である．□

Aの真なる最少例外世界とはAに関する例外が存在しない最も非例外的な世界を指す．

4. 条件論理における証明プロセス

先に述べたように，条件論理の証明とは最少例外世界の状態を決定することである．これを基にした条件論理の証明に関する命題を示す．いま，CL式を$\alpha \Rightarrow \beta$（αはリテラルの連言，βは一個のリテラル），DをCL式の集合，Δをリテラルの集合，γを証明すべき標準論理式（リテラル）とする．また混同の恐れがないときに限り集合Δの全ての要素の連言をΔと記す．またDとΔは無矛盾であるとする．

【命題4】

次の(i)と(ii)は同値である．

(i) DとΔからγが証明される．
(ii) Dを満足する可能世界に対する，Δの真なる全ての最少例外世界において，γが真である．□

αの真なる最少例外世界をSW(α)（$\alpha \Rightarrow \beta \in$ D）と記すことにすると，本稿で提案する証明プロセスは，SW(α)とSW(Δ)との到達関係を求めることにより，SW(Δ)においてγが真であるか偽であるかを求める手続きである．従って，基準世界からSW(Δ)に到達不可能であるか，またはSW(α)からSW(Δ)に到達可能であることを調べることにより，定義2よりSW(Δ)において$\alpha \rightarrow \beta$が真であることが分かる．ここでDに含まれる全てのCL式を満足する可能世界，及び到達関係をDの構造（Structure）と呼ぶことにすると，Dの各要素について，到達関係が定まり，同様にSW(Δ)において真となる標準論理式が得られる．命題4を用いて，Dの構造を基にした命題5を以下に示す．

Dの構造に対するSW(Δ)において，条件論理の解釈により，Dを満足するために必要十分である真の標準論理式集合をNとする．Dの構造が決定されると，Nは一意に定まることに注意されたい．

【命題5】

次の(i)(ii)は同値である．

(i) DとΔからγが証明される．
(ii) Dの構造全てに対するNについて，N$\nvDash \neg\gamma$であり，
　かつN$\vDash\gamma$なるDの構造が少なくとも1つ存在する．□

尚，$\vDash$，$\nvDash$は各々論理的帰結であること，論理的帰結でないことを表す．N$\vDash \neg\gamma$なるNが存在するならば，γが偽であるSW(Δ)が存在する．またN$\vDash\gamma$なるNが存在しなければ，ある構造に対

Proof Procedure for Conditional Logic Based on Simplest Worlds
Youichi MORI, Jun-ichi MORIUMA, Noboru BABAGUCHI, Yoshikazu TEZUKA
Osaka University

する$SW(\Delta)$においてγが偽である時もDに無矛盾であるので，全ての構造に対する$SW(\Delta)$においてγが真であるとは限らない．

以上より明らかなように，条件論理における証明では，CL式の集合の構造及びそれに対応するNを求めることが，主たる課題となる．そこで以下に$NS(D,\alpha)$,$TNS(D,\Delta)$を定義する．

【定義6】($NS(D,\alpha)$の定義)

$NS(D,\alpha) \triangleq \{\alpha \to \beta \mid \alpha \Rightarrow \beta \in D\}$ □

$NS(D,\Delta)$は$E(SW(\Delta),w1)$なる全ての$w1$において，条件論理の解釈により必ず成り立つ標準論理式である．

【定理7】

基準世界から$SW(\Delta)$に到達可能であるとき，

(i) $\alpha \Rightarrow \beta \in D$かつ$\Delta \wedge NS(D,\Delta) \nvDash \alpha$ならば，$SW(\Delta)$において$\alpha \to \beta$が成り立つ．

(ii) $\alpha \Rightarrow \beta \in D$かつ$\Delta \wedge NS(D,\Delta) \vDash \alpha$ならば，$E(SW(\Delta),SW(\alpha))$である． □

(ii)において，$SW(\alpha)$は$SW(\Delta)$より少なくとも同様に非例外的であるので，$E(SW(\Delta),SW(\alpha))$である．(i)において，$SW(\alpha)$に到達可能であるとき，$E(SW(\alpha),SW(\Delta))$であることから$SW(\Delta)$において$\alpha \to \beta$が成り立つ．また$SW(\alpha)$に到達不可能であるとき，αは到達可能な全ての世界において偽であるので，$SW(\Delta)$においても$\alpha \to \beta$が成り立つ．

【定義8】($TNS(D,\Delta)$の定義)

$TNS(D,\Delta) \triangleq NS(D,\Delta) \cup$

$\{\alpha \to \beta \mid \alpha \Rightarrow \beta \in D$かつ$\Delta \wedge NS(D,\Delta) \nvDash \alpha\}$ □

定理7より，$TNS(D,\Delta)$は，$SW(\Delta)$から到達可能な全ての世界において真となる標準論理式の集合である．

これらの定義と定理を用いて各$SW(\alpha)$と$SW(\Delta)$の到達関係を以下のI～IIIに場合分けする．

I．基準世界から$SW(\alpha)$と$SW(\Delta)$に到達可能であるとき，到達関係の前方結合則より

(i) $E(SW(\alpha),SW(\Delta))$と$E(SW(\Delta),SW(\alpha))$が成り立つ．

(ii) $E(SW(\Delta),SW(\alpha))$のみが成り立つ．

(iii) $E(SW(\alpha),SW(\Delta))$のみが成り立つ．

II．基準世界から$SW(\alpha)$にのみ到達可能である．

III．基準世界から$SW(\Delta)$にのみ到達可能である．

他の最少例外世界どうしの到達関係の場合分けに関しては何も得られないが，証明に必要なものは各構造において$E(SW(\alpha),SW(\Delta))$なるαのみである．なぜなら定義2より$SW(\Delta)$の真理値割当に影響を及ぼすのは，各々の$SW(\alpha)$と$SW(\Delta)$について$E(SW(\alpha),SW(\Delta))$が成り立つときに限るからである．

【定義9】(D^+とD^-の定義)

$D^+ \triangleq \{\alpha^+ \Rightarrow \beta^+ \in D \mid \Delta \wedge NS(D,\Delta) \nvDash \alpha^+\}$, $D^+ \subseteq D$

$D^- \triangleq \{\alpha^- \Rightarrow \beta^- \in D \mid \Delta \wedge NS(D,\Delta) \vDash \alpha^-\}$, $D^- \subseteq D$ □

定理7より$SW(\alpha^+)$に関しては，全ての構造に対する$SW(\Delta)$において$\alpha^+ \to \beta^+$が真となるので，これ以上到達関係を調べる必要がなく，$SW(\alpha^-)$に関してのみ上の場合分けに応じた到達関係を調べればよい．また定理7より，$E(SW(\Delta),SW(\alpha^-))$が成り立つので各$\alpha^-$について，$E(SW(\alpha^-),SW(\Delta))$が成り立つかどうかを調べればよい．ここでこれらの到達関係の場合分けを考慮したDの構造を表す組MEを定義する．

【定義10】(MEの定義)

MEは$SW(\Delta)$と全ての$SW(\alpha^-)$からなる組であり，

ME=$\langle SW(xi) \mid xi=\Delta$ or α^-, $i=1,\cdots,m \rangle$とする．但し，

$NSA(D,xi) \triangleq NS(D,x1) \cup \cdots \cup NS(D,xi) \cup$

$TNS(D,\Delta) \cup \{xi\}$

が無矛盾であるように，$SW(xi)$が順序づけされている． □

$NSA(D,xi)$は，MEの表す構造に対する$SW(xi)$において，Dを満足するために必要十分な真の標準論理式集合を表している．

条件論理の解釈より，$E(SW(xi),SW(xj))$ $(i \leq j)$が成り立つので，MEはDの構造を表す．またMEの要素の順序を変えて生成されるMEも同様にDの構造である．ここで定理7より$E(SW(\alpha^+),SW(\Delta))$は常に成り立ち，順序の変えることにより生成される全てのMEを求めるならば，Dの全ての構造に対する$SW(\alpha)$と$SW(\Delta)$の到達関係が求められ，よって，全ての$NSA(D,\Delta)$が求められる．ここで$NSA(D,\Delta)$はDの構造に対する$SW(\Delta)$のおいて真となる全ての標準論理式の集合であることから命題5のNに相当する．よって命題5より定理11が導かれる．

【定理11】

次の(i)(ii)は同値である．

(i) DとΔからγが証明される．

(ii) 全てのMEについて$NSA(D,\Delta) \nvDash \neg\gamma$であり，かつ$NSA(D,\Delta) \vDash \gamma$なるMEが存在する． □

5．証明の例

Δ={Raven(Pon),Has-wing(Pon)}

D={Raven(x)⇒Black(x),

Raven(x)∧Albino(x)⇒¬Black(x)}より，

γ=Black(Pon)を証明する．

$NS(D,\Delta)=\phi$より，

$\Delta \wedge NS(D,\Delta) \vDash$ Raven(Pon)

$\Delta \wedge NS(D,\Delta) \nvDash$ Raven(Pon)∧Albino(Pon)

であることから

D^+={Raven(Pon)∧Albino(Pon)⇒¬Black(Pon)}

D^-={Raven(Pon)⇒Black(Pon)}

が求められる．

次にD^+から

$TNS(D,\Delta)$={Raven(Pon)∧Albino(Pon)→¬Black(Pon)}

が得られ，また$TNS(D,\Delta)$より，D^-について

ME1=⟨SW(Raven(Pon)),SW(Raven(Pon)∧Has-wing(Pon))⟩

ME2=⟨SW(Raven(Pon)∧Has-wing(Pon)),SW(Raven(Pon))⟩

となり，ME1とME2が得られる全てのMEである．

次に得られた各MEについて$NSA(D,\Delta)$を求める．

ME1について，

$NSA(D,\Delta)$={Raven(Pon)→Black(Pon),

Raven(Pon)∧Albino(Pon)→¬Black(Pon),

Raven(Pon)∧Has-wing(Pon)}

よって$NSA(D,\Delta) \vDash$ Black(Pon)である．…①

ME2について，

$NSA(D,\Delta)$={Raven(Pon)∧Albino(Pon)→¬Black(Pon),

Raven(Pon)∧Has-wing(Pon)}

よって$NSA(D,\Delta) \nvDash$ Black(Pon), $NSA(D,\Delta) \nvDash$ ¬Black(Pon)である．…②

定理11から①，②よりDとΔからBlack(Pon)が証明される．

6．まとめ

本稿では，条件論理における重要な概念である最少例外世界に着目した証明について考察した．本手法により，条件論理における証明が，標準論理式の集合から論理的に帰結されるか否かを判定することに帰着される．尚，今後の課題として¬(α⇒β)なる式をDに含めた場合についての検討が挙げられる．

《参考文献》

[1] Delgrande, J.P. : "A First-Order Conditional Logic for Prototypical Properties", Artificial Intelligence, Vol.33, No.1, pp.105-130 (1987).

[2] Groeneboer, C. and Delgrande, J.P. : "Tableau-Based Theorem Proving in Normal Conditional Logics", Proc. of AAAI88, Vol.1, pp.171-176 (1988).

[3] Delgrande, J.P. : "An Approach to Default Reasoning Based on a First-Order Conditional Logic", Artificial Intelligence, Vol.36, No.1, pp.63-90 (1988).