# 連立非線形方程式について(3)

5L-6

管　正志　熊谷　泰幸　平野　菅保
日本大学

## 1. はじめに

連立非線形方程式を解くにあたって、出発値から近い解を求めたいとき、出発値を解と解との中間あたりに与えたり、または、解が集まっている中心付近に与えてしまった場合に、一般的な方法であるニュートン法で解くと減速してもヤコビアン係数行列の行列式の値が零になるか、それに近い現象が起こることもある。そのため、ニュートン法で解くことが困難になる場合や出発値から求めたい近い解を通り越して、かなり離れた解に収束し、求めたい解を得られないことがある。そこで、このような現象が起こったとき、テーラー展開の2次の項まで用いることによりこの問題を解決し、出発値から近い解に収束させる方法について述べる。

## 2. 解法

連立非線形方程式　$F_i(x_1,\cdots,x_n)=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$ 　　(1)

とし、出発値 $x_j=x_j^{(0)}$ $(j=1,\cdots,n)$ として、式(1)を1次までテーラー展開し、2次以降の項を無視をすると、式(2)のようになり、ガウスの消去法で解いて補正値 $dx_j(j=1,\cdots,n)$ を求める。(多変数のニュートン法の補正値の計算)

$$F_i(x_1+dx_1,\cdot\cdot,x_n+dx_n) \fallingdotseq \sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{n} dx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]^k F_i(x_1,\cdot\cdot,x_n)=0$$

$(i=1,\cdots,n)$ 　　(2)

式(1)を2次の項まで採用し、3次の項以上を打ち切ると次式のようになる。

$$F_i(x_1+dx_1,\cdot\cdot,x_n+dx_n) \fallingdotseq \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{n} dx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]^k F_i(x_1,\cdot\cdot,x_n)=0$$

$(i=1,\cdots,n)$ 　　(3)

但し、ガウスの消去法で、完全枢軸選択をとっても枢軸要素が零になってしまったとき、式(3)を用いて、もう一度最初から1次の項だけで消去法を行ない、その現象が起こったときに、2次の項の係数の絶対値の最大値の項とを入れ換えて補正値を求める。なお、この場合で求まった値は、そのまま補正値とする。

式(2)で求まった補正値 $dx_j(j=1,\cdots,n)$ を式(3)に代入したとき、各式の各項のごとの絶対値を計算し、絶対値の最大値を各式ごとに求める。

もし、1つでも2次の項が最大値になったならば、その2次の項の要素とこれに関係している1次の項の要素とを入れ換えて、再びガウスの消去法で補正値を求め直す。

1次の項のみ最大値になっていないときは、その求まった値を補正値とする。

求まった補正値を近似解に代入し、反復計算させることにより解に収束させる。

---

On a set of nonlinear equations (3)
Masashi SUGA, Yasuyuki KUMAGAI, Sugayasu HIRANO
NIHON, Univ.

3．数値例

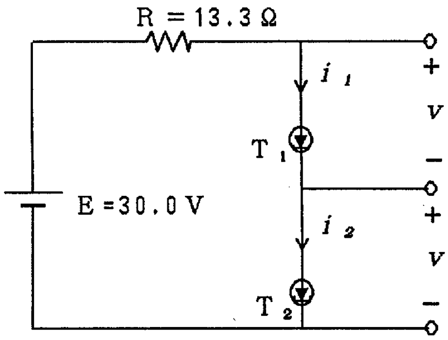

図 1

数値例として、奥村ら[1]の例題にある、2個のトンネルダイオードが直列に接続されたとき（図1）のトンネルダイオードの特性は、

$$\begin{cases} g_1(v_1) = 2.5v_1^3 - 10.5v_1^2 + 11.8v_1 & (4\cdot1) \\ g_2(v_2) = 0.43v_2^3 - 2.69v_2^2 + 4.56v_2 & (4\cdot2) \end{cases}$$

と仮定する。

このときの回路方程式は、

$$\begin{cases} T_1: \ F_1(v_1, v_2) = E - R\cdot g_1(v_1) - (v_1 + v_2) = 0 & (5\cdot1) \\ T_2: \ F_2(v_1, v_2) = g_1(v_1) - g_2(v_2) = 0 & (5\cdot2) \end{cases}$$

式（4・1），（4・2）を式（5・1），（5・2）に代入すると、

$$\begin{cases} F_1(v_1, v_2) = -33.25v_1^3 + 139.65v_1^2 - 157.94v_1 - v_2 + 30.0 = 0 & (6\cdot1) \\ F_2(v_1, v_2) = 2.5v_1^3 - 10.5v_1^2 + 11.8v_1 - 0.43v_2^3 + 2.69v_2^2 - 4.56v_2 = 0 & (6\cdot2) \end{cases}$$

E = 30.0V、R = 13.3Ωとし、出発値を $v_1^{(0)} = 2.0$, $v_2^{(0)} = 0.8$とすると、反復1回目のニュートン法で求めた補正値及び近似解は、

$dv_1 = -3.483325$ $\qquad v_1^{(1)} = 0.1387362$

$dv_2 = -1.483375$ $\qquad v_2^{(1)} = 0.9387361$

求まった補正値を式（6・1），（6・2）を2次の項までのテーラー展開式に代入し、そのときの各式の各項ごとの絶対値を計算すると、第1式、第2式ともに $dv_1^2$ の項の絶対値が最大値となる。$dv_1$ の項と $dv_1^2$ の項とを入れ換えて計算し直すと、補正値は $dv_1 = \pm0.3168259$, $dv_2 = -0.8769345$となり、近似解は、

$$\begin{cases} v_{11}^{(1)} = 2.316826 \\ v_{12}^{(1)} = 0.7123065 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{21}^{(1)} = 1.683173 \\ v_{22}^{(1)} = 0.7123065 \end{cases}$$

さらに反復計算すると、反復3回目で解に収束し、そのときの近似解 $v_{ij}^{(k)}$ と奥村ら[1]に示された解 $v_{ijT}$ を示すと、

$$\begin{cases} v_{11}^{(3)} = 2.305224 \\ v_{12}^{(3)} = 0.7055676 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{11T} = 2.3055 \\ v_{12T} = 0.7056 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{21}^{(3)} = 1.666379 \\ v_{22}^{(3)} = 0.7393425 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{21T} = 1.6663 \\ v_{22T} = 0.7393 \end{cases}$$

なお、この計算結果は、出発値から近い解に収束した。

4．結論

3．数値例を示したように出発値 $v_1^{(0)} = 2.0$, $v_2^{(0)} = 0.8$は、ニュートン法で解くと、出発値からかなり離れた解に収束してしまう例であるが、今回の方法を用いると、一応出発値から近い解に収束させた。

さらに、2次の項を用いた場合には、複数個の解に収束させることが出来た。

しかし、どの問題についてのこの方法で解くことが出来るかは断定できない。

【参考文献】

(1)奥村　浩士，佐伯　秀一，木嶋　昭：区間解析による非線形回路方程式の求解アルゴリズムに関する一考察
電子通信学会論文誌（A）（1986）Vol.J69-A,NO.4,p.489-p.496.