1H-6

Short Time FFT Hilbert変換の構成

古賀裕規　堀田雄二　岸　政七
愛知工業大学　情報通信工学科

1. はじめに

Hilbert変換は、周波数資源を有効に利用するSSB変調等において重要な役割を果たすなど信号処理において重要な基本機能である。瞬時スペクトラムが得られるShort Time DFT (ST−DFT) を用いた新しいタイプのHilbert変換は、入力信号の実部と虚部とを周波数域上で入れ換えることで実現され、理想位相推移、振幅特性を有する[1]。本稿ではFFT構造を達成しうる処理に基づき演算量の軽減が可能な Short Time FFT (ST−FFT) Hilbert変換[2] の構成について報告する。

2. Short Time DFT Hilbert変換

時刻nのHilbert変換された瞬時スペクトラム$\hat{\Phi}(n)$は、次の様に与えられる[1]。

$$\hat{\Phi}(n)=\{\hat{\phi}_0(n),\hat{\phi}_1(n),\hat{\phi}_2(n),\cdots,\hat{\phi}_{N-1}(n)\}^T \quad (1)$$

ここに$\hat{\phi}_k(n)$は次のように与えられる周波数インデックスkに対する周波数成分である。

$$\hat{\phi}_k(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)\,h(n-r)\,\hat{W}_N^{-rk} \quad (2)$$

ただし、x(r)は時刻rにおける入力信号、h(*)はウィンド関数、Nはフレーム内サンプル数、$\hat{W}_N^{-rk}$はHilbert変換演算子である。

$$\hat{W}_N^{-rk}=\begin{cases}\exp\{-j(2\pi rk/N+\pi/2)\}, & \text{if } 0<k<N/2\\ 0, & \text{if } k=0,N/2\\ \exp[j\{2\pi r(N-k)/N+\pi/2\}] \\ \quad =\exp\{-j(2\pi rk/N-\pi/2)\}, & \text{if } N/2<k<N\end{cases} \quad (3)$$

式3の複素指数関数にかける定数$\pi/2$が位相量を与える。また、純虚数であるため得られる瞬時スペクトラムは周波数成分の絶対値を変化させることはない。

一方、Hilbert変換された時刻nの出力信号$\hat{y}(n)$ はShort Time 逆DFT (ST−IFT) を用い次の様に求まる。

$$\hat{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{\phi}_k(n)W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}[\hat{\phi}_k(n)W_N^{nk}+\hat{\phi}_{N-k}(n)W_N^{n(N-k)}] \quad (4)$$

ここに、$W_N^{nk}=\exp\{j(2\pi nk/N)\}$

ST−IFTの演算子において、W_N^{nk}と$W_N^{n(N-k)}$とが互いに複素共役であるので、Hilbert変換した周波数成分$\hat{\phi}_k(n)$と$\hat{\phi}_{N-k}(n)$とが互いに複素共役でなければならない。また、ST−DFTの周波数インデックス0とN/2に対応する周波数成分$\phi_0(n)$, $\phi_{N/2}(n)$が純実数で表されるため、Hilbert変換した成分$\hat{\phi}_0(n)$, $\hat{\phi}_{N/2}(n)$は0でなければならない。かかる条件を満足する場合、出力$\hat{y}(n)$の位相特性は理想状態となる。

3. Short Time FFT Hilbert変換の構成

入力信号とウィンド関数との畳み込みで得られた信号に巡回構造を導入することで、Hilbert変換演算子は全ての時刻に対し定数となる事を以下に示す。

Hilbert変換された瞬時スペクトラム成分$\hat{\phi}_k(n)$を与える式1は、2回の変数変換$s=r-n$, $s=\ell N+m$を施すことにより、次の様に変形できる。

$$\hat{\phi}_k(n)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} x(n+s)\,h(-s)\,\hat{W}_N^{-(n+s)k}$$

$$=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{N-1} x(n+\ell N+m)\,h(-\ell N-m)\,\hat{W}_N^{-(n+\ell N+m)k} \quad (5)$$

式5では、瞬時スペクトラム成分$\hat{\phi}_k(n)$は無限長入力に対しての総和が必要となる。しかしウィンド関数h(*)を有限長に打切れば、結果として総和の範囲も有限長となる。式5の総和の順序は入れ換え次式を得る。

$$\hat{\phi}_k(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_m(n)\hat{W}_N^{-(n+m)k}$$

$$=W_N^{-nk}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_m(n)\hat{W}_N^{-mk} \quad (6)$$

ただし、

$$\tilde{x}_m(n)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(n+\ell N+m)\,h(-\ell N-m)$$

A Proposal of Short Time FFT Hilbert Transformer and its Configuration
Hiroki KOGA, Yuuji HOTTA, Masahichi KISHI
Department of Information Network Engineering, Aichi Institute of Technology

式６は時刻ℓNすなわちNサンプル毎にのみ、ＤＦＴと同様な形で表現される。W_N^{-nk}は周波数域でのNを法とする巡回を意味するが、時間域上でも等価な効果を与えることができる。時間域上で巡回する成分を$x_m(n)$とすれば、その処理は式７の様に表される。

$$\mathfrak{X}_k(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x_m(n)\hat{W}_N^{-mk} \qquad (7)$$

ただし、

$x_m(n)=\mathfrak{X}_{[m-n]_N}(n)$

$[M]_N = M \bmod N$

式７は$x_m(n)$を入力とするN点ＤＦＴと形式的に一致する。換言すればＦＦＴアルゴリズムの Short Time ＤＦＴへの適用を可能とする。

図１にＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換の構成を示す。このＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換における操作は４つに分けることができる。第１の操作では、入力信号とウィンド関数との畳み込みで$\mathfrak{X}_m(n)$を求め、時間域でシフトすることにより$x_m(n)$を得る。第２の操作では、ＦＦＴを用いて瞬時スペクトラムを求める。第３の操作では、周波数域上で実部と虚部の入替えならびに符号反転によりHilbert変換を行なう。最後の操作ではＳＴ－ＩＦＴを用いて、Hilbert変換されたスペクトラム成分を時間域信号に合成する。

4. Short Time ＦＦＴ Hilbert変換の実験結果

ＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換のウィンド関数h(*)を８フレーム長のNyquist、フレーム内サンプル数をN＝32とした場合のＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換の単位サンプル応答を図２に示す。図2.(a)は時間域応答、(b)はそのパワースペクトラムを示す。これらは、既に報告しているＳＴ－ＤＦＴ Hilbert変換[1]の応答結果に正しく一致し、ＦＦＴ処理の導入が正しく機能している事を意味する。

5. まとめ

ＳＴ－ＤＦＴ Hilbert変換に巡回構造を導入することで周波数解析部をN点ＤＦＴ化でき、Hilbert変換演算子が全ての時刻において定数とみなす事ができる。換言すれば、ＦＦＴの適用が可能となり、ＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換の存在を示すことができた。ＦＦＴ化の結果演算量は、ＤＦＴ形に比し、周波数解析N／$\log_2$N倍に高速化できる。演算量の軽減により、実際にハードウェア化を考えた場合使用素子の演算速度への遅延配分を大きくとれるなどの利点も派生しよう。

【文献】 [1]M.Kishi,"A Proposal of Short Time DFT Hilbert Transformers and Its Configuration",Trans. IEICE,vol.E71,No5,May 1988,pp466-468.
[2]岸,古賀,"Short Time FFT Hilbert変換の存在"昭63東海連大No421.

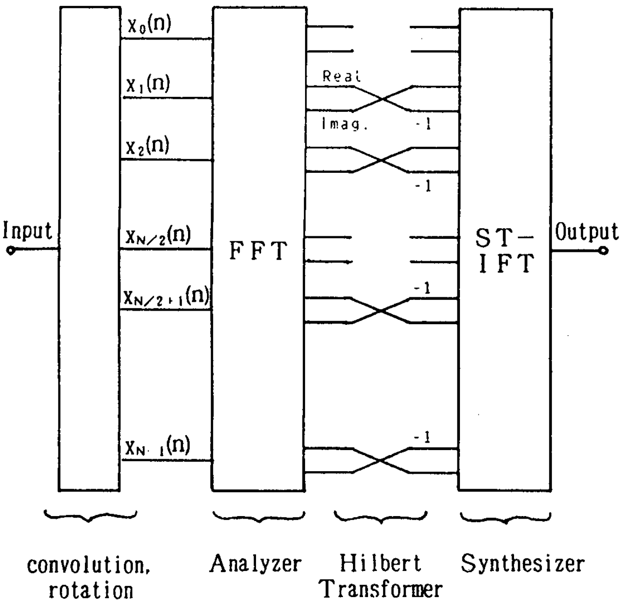

図1 ＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換の構成

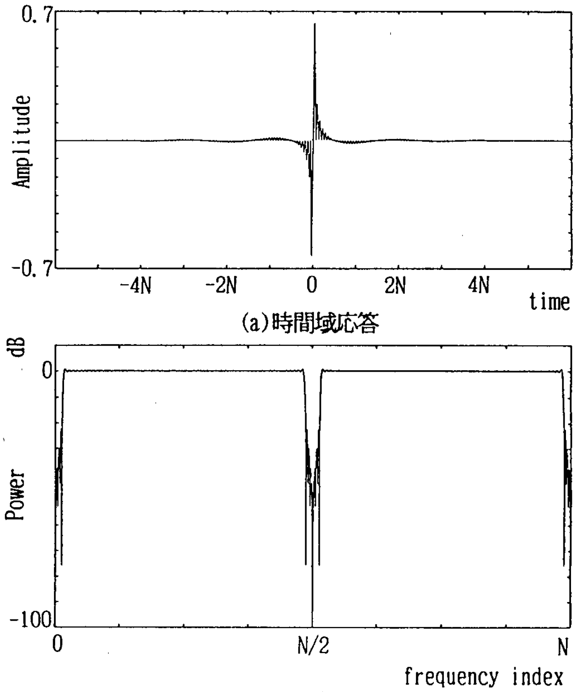

図2 ＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換の単位サンプル応答