

# 代用電荷法による円弧スリット円環領域への 数値等角写像の方法

岡野 大<sup>†</sup> 牧 直正<sup>†</sup>  
緒方 秀教<sup>†</sup> 天野 要<sup>†</sup>

原点を中心とする同心円弧状の曲線スリットをともなう円環領域を円弧スリット円環領域と呼ぶ。本論文では、代用電荷法を適用して、有界な多重連結領域から円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案する。また、その有効性を数値実験的に検証する。具体的には、等角写像の問題を一对の共役な調和関数を求める問題に帰着させ、それらの調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似する。特に、主値を用いて連続な近似写像関数の構成法を明示して、複素対数関数の数値計算にともなう不連続性の問題を解消する。その結果、これまでの一連の研究とともに、Nehari (1952) の基本的な標準スリット領域への簡単に高精度な数値等角写像が可能となる。

## Numerical Conformal Mapping onto a Circular Annulus with Concentric Circular Slits by the Charge Simulation Method

DAI OKANO,<sup>†</sup> NAOMASA MAKI,<sup>†</sup> HIDENORI OGATA<sup>†</sup>  
and KANAME AMANO<sup>†</sup>

We present a method of numerical conformal mapping of a bounded multiply-connected domain onto a circular annulus with concentric circular slits. In the method, we reduce the mapping problem to a Dirichlet one for a pair of conjugate harmonic functions and solve it using the charge simulation method, which yields an approximate mapping function expressed with a linear combination of complex logarithmic potentials. We also present continuous schemes for practical computations in order to avoid the discontinuities due to using the principal value of the complex logarithmic function. Numerical results for a typical problem show the effectiveness of our method. This paper completes a series of our studies on the numerical conformal mappings onto the standard slit domains of Nehari (1952).

### 1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学や工学への応用も広い。特に、いくつかのJordan閉曲線を境界とする多重連結領域から様々な形状のスリットをともなう標準領域への等角写像は重要な問題である。典型的な標準領域として、Nehari<sup>16)</sup>は(a)平行スリット領域、(b)円弧スリット領域、(c)放射スリット領域、(d)円弧スリット円板領域、(e)円弧スリット円環領域、をあげている(図1)。これら以外にも、放射スリットをともなう円板領域や円環領域、円弧スリットと放射スリットを同時にともなう領域、円板の外部でスリットをともなう領域等、応用上重要な様々なスリット領域が存在する。しかし、Nehariは次

のような理由で図1の領域を選択的に取り上げたものと想像される:(i)これらが幾何学的に異なる構造を持つこと、(ii)他の多くは組合せや反転の問題として扱うことができること。このような視点から、上記の5種の標準スリット領域への数値等角写像の方法は基本的に重要な研究課題である。

天野<sup>3)~6)</sup>は非有界な多重連結領域から、(a)平行スリット領域、(b)円弧スリット領域、(c)放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した。具体的には、これらの等角写像の問題を一对の共役な調和関数を求める問題に帰着させ、ポテンシャル問題の高精度高速解法として知られている代用電荷法を適用して、それらの調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似した。これらの3種の問題は同じ係数行列を持つ連立1次方程式に帰着できるので、電荷数の3乗の計算量を要するLU分解は1度行えばよい<sup>8)</sup>。彼らは、また、有界な

<sup>†</sup> 愛媛大学工学部情報工学科  
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

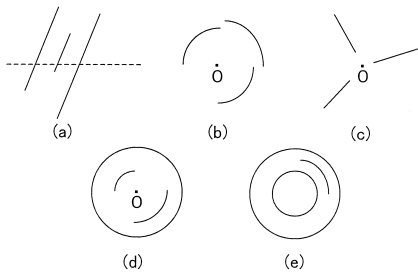


図 1 Nehari (1952) の標準スリット領域

Fig.1 Standard slit domains of Nehari (1952).

多重連結領域から，(d) 円弧スリット円板領域への数値等角写像の方法を提案した<sup>7)</sup>。

本論文では，同様に代用電荷法を適用して，有界な多重連結領域から，(e) 円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証する．Nehari が異なる標準領域としたように，(d) 円弧スリット円板領域と，(e) 円弧スリット円環領域への等角写像は性質が多少異なり，その違いは数値等角写像の方法にも反映する．実際，代用電荷法は積分方程式法のソース密度を離散化したものであるという解釈で，2 重連結領域の場合に Symm の積分方程式法に一致する定式化と Gaier の積分方程式法に一致する定式化の 2 通りの定式化が可能である．ここでは，直感的な理解が容易であるという理由で前者を採用する．

これとは独立に，久原ら<sup>10)~12)</sup> は，(c) 放射スリット領域や，(e) 円弧スリット円環領域，放射スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案し，数値例でその有効性を示している．天野らと久原らの研究では，問題と方法に表現上の違いはあるが，代用電荷法を適用した数値計算の本質は同じである．遡って，Reichel<sup>18)</sup> は，(d) 円弧スリット円板領域と，(e) 円弧スリット円環領域への問題に調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現による第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法を適用している．

本論文では，主値を用いて連続な近似写像関数の構成法を明示して，複素対数関数の数値計算にともなう不連続性の問題を解消する．久原ら<sup>10)~12)</sup> や Reichel<sup>18)</sup> は連続性の保証された近似写像関数の構成法を与えていない．さらに，提案した方法を Reichel と同じ問題領域に適用して，代用電荷法と積分方程式法の計算精度を比較する．

なお，代用電荷法については村島<sup>14)</sup>，岡本ら<sup>17)</sup>，室田<sup>15)</sup>，積分方程式法を中心とした数値等角写像については Henrici<sup>9)</sup>，Trefethen<sup>19)</sup>，Kytke<sup>13)</sup>，代用電荷法による数値等角写像に関しては天野<sup>1),2)</sup> 等も参

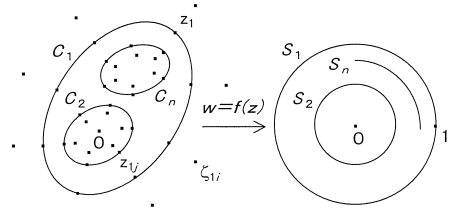


図 2 代用電荷法による円弧スリット円環領域への等角写像

Fig.2 Conformal mapping onto the circular annulus with concentric circular slits by the charge simulation method.

照されたい．

## 2. 写像定理

任意の多重連結領域は原点を中心とする同心円弧状のスリットをともなう円環領域すなわち円弧スリット円環領域へ等角写像することができる．まず， $z$  平面上的 Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  を境界とする  $n$  重連結領域  $D$  から， $w$  平面上の単位円を外円とする円弧スリット円環領域への同相な等角写像を考える．このとき，単位円に移る閉曲線  $C_l$  と内円に移る閉曲線  $C_m$  を任意に指定することができる．その写像関数を  $w = f_{lm}(z)$  ( $l \neq m; l, m = 1, 2, \dots, n$ ) とすれば，境界  $C_1$  上の 1 点を  $z_1$  として，この等角写像は  $f_{lm}(z_1) = 1$  なる正規化条件の下に一意に定まる．

ここでは，問題の領域  $D$  は有界な  $n$  重連結領域であるとし， $D$  を囲む外側の閉曲線を  $C_1$ ， $D$  に囲まれる内側の閉曲線を  $C_2, \dots, C_n$  とする(図 2)．さらに，外側の閉曲線  $C_1$  を単位円に，内側の閉曲線  $C_2$  を内円に移すような等角写像  $w = f_{12}(z)$  を考え，以後はこの  $f_{12}(z)$  を単に  $f(z)$  と記す．写像の結果，閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  は原点を中心とする半径  $r_1 (= 1)$  の単位円  $S_1$  と半径  $r_2 (< 1)$  の同心円  $S_2$  および半径  $(r_2 <) r_3, \dots, r_n (< 1)$  の同心円弧スリット  $S_3, \dots, S_n$  に移るとする．内円の半径およびスリットの位置と長さは上記の正規化条件によって写像関数とともに定まる．

閉曲線  $C_2$  の内側に原点をとって，問題の等角写像の写像関数を

$$f(z) = z \exp(g(z) + ih(z)) \quad (1)$$

と表現する．ここに， $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で共役な調和関数である．曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  が半径  $r_1 (= 1), r_2, \dots, r_n$  の同心円または同心円弧スリットに移るという境界条件  $|f(z)| = r_l$  ( $z \in C_l$ ) から， $g(z)$  は

任意の多重連結領域の問題を簡単な変数変換でこのような問題に帰着させることができるので，問題の一般性は失われない．

$$g(z) - \log r_l = -\log |z| \quad (2)$$

$$(z \in C_l; l = 1, 2, \dots, n),$$

$$r_1 = 1 \quad (3)$$

を満たさなければならない。また、正規化条件  $f(z_1) = 1$  から、 $g(z)$  と  $h(z)$  は

$$g(z_1) + ih(z_1) = -\log z_1 \quad (z_1 \in C_1) \quad (4)$$

を満たさなければならない。

式 (2), (4) から (3) が得られる。したがって、式 (2), (4) が成立すれば式 (1) の  $f(z)$  が問題の等角写像の条件を満たすことは容易に分かる。解の存在と一意性から、問題はこのような共役な調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  を  $r_1 (= 1), r_2, \dots, r_n$  の値とともに求めることに帰着する。

### 3. 数値的方法

#### 3.1 代用電荷法の適用

式 (1) の共役な調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似して、問題の等角写像の近似写像関数を

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \quad (5)$$

$$G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (6)$$

と表現する。ここに、 $Q_0$  は複素定数、 $Q_{li}$  は電荷と呼ばれる実未定係数である。電荷は問題の領域  $D$  の外部すなわち閉曲線  $C_1$  の外側と  $C_2, \dots, C_n$  の内側にそれぞれ  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個ずつ配置する。電荷を配置した点  $\zeta_{li}$  は電荷点と呼ばれる。

式 (6) の虚部  $H(z)$  は一般的には無限多価であり、これが  $D$  内で 1 価であるためには、曲線  $C_l$  ( $l = 2, \dots, n$ ) を囲む任意の閉曲線  $\tilde{C}_l$  に対して個別に

$$\int_{\tilde{C}_l} dH(z)$$

$$= \int_{\tilde{C}_l} d \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \arg(z - \zeta_{mi})$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li}$$

$$= 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 2, \dots, n) \quad (7)$$

が成立しなければならない。

また、この 1 価性の条件の下で、近似写像関数 (5)

に座標のスケール変換  $z \rightarrow \alpha z, \zeta_{li} \rightarrow \alpha \zeta_{li}$  ( $\alpha > 0$ ) に対する不変性<sup>15)</sup>、ここでは

$$F(\alpha z; \alpha \zeta_{li})$$

$$= \alpha z \exp \left( Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(\alpha z - \alpha \zeta_{li}) \right)$$

$$= \alpha \exp \left( \log \alpha \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} \right) \cdot$$

$$z \exp \left( Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \right)$$

$$= F(z; \zeta_{li})$$

を制約条件として課すと、 $C_1$  の外側の電荷に対して

$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1 \quad (8)$$

が成立しなければならない。この条件は、また、代用電荷法が積分方程式法のソース密度を離散化したものであるという解釈を可能にする。

さらに、式 (6) の  $G(z)$  に対して、曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  上に  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個ずつ配置した拘束点  $z_{mj}$  で境界条件 (2) を満たすことを要請する。すなわち、 $G(z)$  は拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$G(z_{mj}) - \log R_m = -\log |z_{mj}| \quad (9)$$

( $z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n$ ) を満たさなければならない。 $R_m$  は  $r_m$  の近似値である。

ここで、式 (6) に正規化条件 (4) を課せば、

$$G(z_1) + iH(z_1)$$

$$= Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z_1 - \zeta_{li})$$

$$= -\log z_1$$

である。そこで、 $Q_0$  を消去して、式 (6) を

$$G(z) + iH(z)$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})$$

$$- \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z_1 - \zeta_{li}) - \log z_1$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{li}} \right) - \log z_1 \quad (10)$$

と変形する。

この  $G(z)$  を用いれば、式 (7), (8), (9) は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  個の未知数  $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}, \log R_1,$

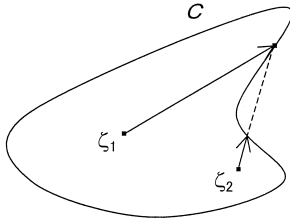


図 3 単純閉曲線の星形性と非星形性

Fig. 3 Starlike and non-starlike properties of a closed Jordan curve.

$\log R_2, \dots, \log R_n$  に対する  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式を構成する。したがって、この連立 1 次方程式を解いて、半径  $R_1, R_2, \dots, R_n$  の値とともに、式 (5) と (10) で問題の等角写像の近似写像関数が得られる。

3.2 連続スキームの構成

数値計算では、複素対数関数として主値、すなわち虚部を  $-\pi < \arg z \leq \pi$  に制限した分枝を用いる。問題の領域で連続な近似写像関数を構成するためにはさらに工夫が必要である。実際、式 (10) をそのまま用いた場合には、主値  $\text{Log}((z - \zeta_{li}) / (z_1 - \zeta_{li}))$  は正規化点  $z_1$  から見た電荷点  $\zeta_{li}$  の背後に  $2\pi i$  の不連続を生じる。

ここでは、まず、曲線  $C_1$  は原点に対して星形で、 $C_2, \dots, C_n$  はそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  に対して星形である、正確にはそのような点  $\zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  をとることができる、と仮定する。ここに、閉曲線  $C$  が点  $\zeta$  に対して星形であるとは  $\zeta$  から  $C$  上のすべての点が見渡せることである。たとえば、図 3 で、 $C$  は  $\zeta_1$  に対して星形であるが、 $\zeta_2$  に対して星形ではない。このような場合には、式 (7) を用いて、式 (10) を

$$\begin{aligned} &G(z) + iH(z) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} \left\{ \log \left( 1 - \frac{z}{\zeta_{1i}} \right) - \log \left( 1 - \frac{z_1}{\zeta_{1i}} \right) \right\} \\ &+ \sum_{l=2}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \left\{ \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} \right) \right. \\ &\left. - \log \left( \frac{z_1 - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{l0}} \right) \right\} - \log z_1 \end{aligned} \tag{11}$$

と変形することができる。主値  $\text{Log}(1 - z/\zeta_{1i})$  の不連続は原点から見た  $\zeta_{1i}$  の背後に、 $\text{Log}((z - \zeta_{li}) / (z - \zeta_{l0}))$  の不連続は  $\zeta_{li}$  と  $\zeta_{l0}$  を結ぶ直線上に現れる。したがって、式 (11) は  $\bar{D} (= D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n)$  で連続である。結局、式 (11) から定数項を除いた部分をあらためて  $G^*(z) + iH^*(z)$  とおき、次のように問題の領域で連続な近似写像関数を構成することができる。

スキーム 1 (星形の場合): 曲線  $C_1$  と  $C_2, \dots, C_n$  が原点とそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  に対して星形であれば、近似写像関数を

$$\begin{aligned} &F(z) \\ &= \frac{z}{z_1} \exp \{ G^*(z) + iH^*(z) - (G^*(z_1) + iH^*(z_1)) \}, \\ &G^*(z) + iH^*(z) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} \log \left( 1 - \frac{z}{\zeta_{1i}} \right) \\ &+ \sum_{l=2}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} \right) \end{aligned}$$

と表現することができる。電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$  と半径  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (正確には、その対数) は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{li}} \right| - \log R_m \\ &= -\log \left| \frac{z_{mj}}{z_1} \right| \\ &(z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n), \\ &\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1, \\ &\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

の解である。

式 (9) に式 (10) と (11) のいずれを代入しても同じ連立 1 次方程式が得られる。拘束点を  $z_{11} = z_1$  にとれば、拘束条件から  $R_1 = 1$  となる。

一般の場合には、未知量を電荷  $Q_{li}$  から電荷の部分

$$\begin{aligned} &Q_{li}^i = \sum_{k=1}^i Q_{lk} \\ &(i = 1, 2, \dots, N_l; l = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{12}$$

に変換し、式 (8) すなわち  $Q_{11}^{N_1} = -1$  と式 (7) すなわち  $Q_{li}^{N_l} = 0$  ( $l = 2, \dots, n$ ) を用いて、式 (10) を

$$\begin{aligned} &G(z) + iH(z) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ Q_{l1}^1 \log \left( \frac{z - \zeta_{l1}}{z_1 - \zeta_{l1}} \right) \right. \\ &+ \sum_{i=2}^{N_l} (Q_{li}^i - Q_{li}^{i-1}) \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{li}} \right) \left. \right\} - \log z_1 \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_{li}^i \left\{ \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\log\left(\frac{z_1 - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{li+1}}\right)\} \\
& + \sum_{l=1}^n Q_l^{N_l} \log\left(\frac{z - \zeta_{lN_l}}{z_1 - \zeta_{lN_l}}\right) - \log z_1 \\
= & \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \left\{ \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right) \right. \\
& \left. - \log\left(\frac{z_1 - \zeta_{li}}{z_1 - \zeta_{li+1}}\right) \right\} \\
& - \log\left(\frac{z - \zeta_{1N_1}}{z_1 - \zeta_{1N_1}}\right) - \log z_1 \quad (13)
\end{aligned}$$

と変形する．主値  $\text{Log}((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{li+1}))$  の不連続は  $\zeta_{li}$  と  $\zeta_{li+1}$  を結ぶ直線上に現れる．したがって，電荷点をおる程度密に配置すれば，この項は  $\bar{D}$  で連続である．結局，式 (13) の最初の 1 項をあらためて  $G^*(z) + iH^*(z)$  とおき，次のように問題の領域で連続な近似写像関数を構成することができる．

スキーム 2 (一般の場合): 近似写像関数を

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z(z_1 - \zeta_{1N_1})}{z_1(z - \zeta_{1N_1})} \\
&\cdot \exp\{G^*(z) + iH^*(z) - (G^*(z_1) + iH^*(z_1))\}, \\
G^*(z) + iH^*(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right)
\end{aligned}$$

と表現する．電荷の部分積  $Q_1^1, Q_1^2, \dots, Q_n^{N_n-1}$  と半径  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (正確には，その対数) は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n$  元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log\left|\frac{(z_{mj} - \zeta_{li})(z_1 - \zeta_{li+1})}{(z_{mj} - \zeta_{li+1})(z_1 - \zeta_{li})}\right| \\
& - \log R_m = -\log\left|\frac{z_{mj}(z_1 - \zeta_{1N_1})}{z_1(z_{mj} - \zeta_{1N_1})}\right|
\end{aligned}$$

( $z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n$ ) の解である．

近似写像関数の形の変更によって，式 (13) の  $\log((z - \zeta_{1N_1})/(z_1 - \zeta_{1N_1}))$  の項に現れる不連続の問題，すなわち  $\zeta_{1N_1}$  の配置の制約<sup>7)</sup>，を解消している．この場合にも  $z_{11} = z_1$  にとれば  $R_1 = 1$  となる．

### 3.3 誤差評価

解析関数の最大値の定理によれば，有界閉領域で連続で内部で解析的な関数の絶対値は境界上で最大値をとる．したがって，近似写像関数の誤差は曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  上のいずれかの点で最大値をとり，

$$\begin{aligned}
E_F(z) &= |F(z) - f(z)| \\
&\leq \max_{z \in C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n} |F(z) - f(z)| = E_F \quad (14)
\end{aligned}$$

となる．

## 4. 数値実験

問題の領域  $D$  は楕円と円

$$\begin{aligned}
C_1 &: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\
C_2 &: |z| = 0.5, \\
C_3 &: |z - 1.2| = 0.3
\end{aligned}$$

を境界とする実軸に対称な 3 重連結領域で， $\zeta_{20} = 0$ ， $\zeta_{30} = 1.2$  である．楕円  $C_1$  に対する拘束点と電荷点の配置には Joukowski 変換

$$z(t) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (a > b > 0)$$

を用いる．この変換は  $t$  平面上の単位円  $|t| = 1$  と半径  $\rho$  の同心円  $|t| = \rho (> 1)$  をそれぞれ  $z$  平面上の実軸上の閉区間  $[-\sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - b^2}]$  とその両端点を焦点とする楕円に写像する．特に，半径  $\rho = \sqrt{(a+b)/(a-b)}$  の円は楕円  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  に移る．そこで， $a = 2$ ， $b = 1$  の場合の変換

$$z(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right)$$

を用いて，楕円  $C_1$  に対する拘束点と電荷点を

$$\begin{aligned}
z_{1j} &= z(\sqrt{3}e^{i\theta_j}), \quad \zeta_{1j} = z(\sqrt{3}q^{-1}e^{i\theta_j}), \\
\theta_j &= \frac{2\pi(j-1)}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

と配置する．円  $C_2$  と  $C_3$  に対する拘束点と電荷点は

$$\begin{aligned}
z_{2j} &= 0.5e^{i\theta_j} \quad \zeta_{2j} = 0.5qe^{i\theta_j}, \\
z_{3j} &= 0.3e^{i\theta_j} + 1.2, \quad \zeta_{3j} = 0.3qe^{i\theta_j} + 1.2, \\
\theta_j &= \frac{2\pi(j-1)}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

と配置する．ここに， $q$  ( $0 < q < 1$ ) は電荷配置のパラメータである．

誤差の指標として，

$$E_{Ml} = \max_{1 \leq j \leq N} |F(z_{lj+1/2}^{(N)}) - R_l^{(N)}|,$$

$$E_{Rl} = |R_l^{(N)} - R_l^{(2N)}| \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

を計算する．ここに， $z_{lj+1/2}$  は  $C_l$  上の拘束点  $z_{lj}$  と  $z_{lj+1}$  の中間点であり， $R_l^{(2N)}$  は電荷数を  $2N$  に倍増した場合の計算値である．

数値実験は DEC Digital Personal Workstation 500au 上の FORTRAN 倍精度計算による．連立 1 次方程式の求解と条件数の評価には IMSL を使用する．解の反復改良は行わない．

図 4 と表 1 に計算結果を示す．ここに， $cond$  は連立 1 次方程式の係数行列の  $L_1$  条件数， $R_l$  は電荷を倍増して異なる数字が現れた桁までの値である． $N = 128$

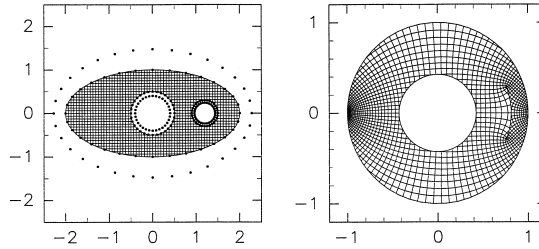


図 4 数値等角写像 ( $N = 32, q = 0.8$ )

Fig. 4 Numerical conformal mapping of the domain with an elliptic and two circular boundary curves.

表 1 計算精度 ( $q = 0.5$ )

Table 1 Numerical results for the example ( $q = 0.5$ ).  $N^*$  shows the case of ill-conditioning. The second lines of  $C_1, C_2, C_3$  for  $N = 64$  are from comparison with  $N = 128, q = 0.8$ .

$N$		$E_{Ml}$	$E_{Rl}$	$R_l$	$cond$
16	$C_1$	$1.9 \times 10^{-03}$	$1.7 \times 10^{-15}$	$1.0(15)$	$4.7 \times 10^{03}$
	$C_2$	$2.8 \times 10^{-06}$	$7.2 \times 10^{-05}$	0.42596	
	$C_3$	$8.9 \times 10^{-06}$	$4.8 \times 10^{-05}$	0.81102	
32	$C_1$	$2.2 \times 10^{-05}$	$6.1 \times 10^{-15}$	$0.9(14)8$	$2.5 \times 10^{06}$
	$C_2$	$1.1 \times 10^{-08}$	$4.6 \times 10^{-08}$	0.42588659	
	$C_3$	$1.6 \times 10^{-10}$	$4.1 \times 10^{-08}$	0.81097084	
64	$C_1$	$6.5 \times 10^{-09}$	$7.1 \times 10^{-12}$	$1.0(12)$	$3.2 \times 10^{11}$
			$4.0 \times 10^{-15}$	$1.0(14)4$	
	$C_2$	$5.4 \times 10^{-14}$	$5.0 \times 10^{-12}$	0.425886541954	
			$1.8 \times 10^{-13}$	0.42588654195434	
	$C_3$	$5.5 \times 10^{-14}$	$5.2 \times 10^{-12}$	0.810970795718	
			$4.8 \times 10^{-13}$	0.81097079571794	
128*	$C_1$	$4.2 \times 10^{-11}$			$3.8 \times 10^{19}$
	$C_2$	$3.5 \times 10^{-11}$			
	$C_3$	$4.6 \times 10^{-11}$			

の場合には悪条件となるので、電荷配置のパラメータを  $q = 0.8$  とすれば、 $E_{M1} = 1.3 \times 10^{-13}$ ,  $E_{M2} = 8.2 \times 10^{-15}$ ,  $E_{M3} = 4.9 \times 10^{-13}$ ,  $cond = 5.5 \times 10^8$  という結果が得られる。  $N = 64$  の  $C_1, C_2, C_3$  の 2 行目はそれぞれ  $R_l^{(2N)}$  にこのときの値を用いたものである。  $E_{Ml}$  は外側の楕円上で最大値をとる。

Reichel<sup>18)</sup> は同じ問題に調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現による第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法を適用している。計 93 ( $N = 31$  に相当する) 変数を用いた Fourier-Galerkin 法による反復計算の結果として、

$$E_{M1} = 1.1 \times 10^{-3}, R_1 = 1.5000000,$$

$$E_{M2} = 1.6 \times 10^{-5}, R_2 = 0.63882980,$$

$$E_{M3} = 7.8 \times 10^{-7}, R_3 = 1.2164562$$

という値を報告している。円板の半径の理論値は  $r_1 = 1.5$  で、これは曲線  $C_1$  の容量の値である。

公平な比較のためには、代用電荷法の  $E_{Ml}$  と  $R_l$  の値を 1.5 倍しなければならない。それでも、 $E_{Ml}$  を

指標として、代用電荷法の精度は Reichel の結果より 2 桁程度高い。Reichel は  $R_2$  と  $R_3$  の値の信頼性については何も記していない。しかし、代用電荷法の値と Reichel の値は高い精度で一致している。

なお、問題の領域  $D$  の境界が円や楕円に限らない一般の閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の場合には、まず拘束点  $z_{l1}, z_{l2}, \dots, z_{lN_l}$  を各  $C_l$  上に反時計回りに配置し、次いで電荷点を

$$\zeta_{lj} = z_{lj} + iq(z_{lj+1} - z_{lj-1})$$

$$(q > 0; j = 1, 2, \dots, N_l; l = 1, 2, \dots, n)$$

と配置することができる。ここに、 $z_{l0} = z_{lN_l}$ ,  $z_{lN_l+1} = z_{l1}$  で、複号は  $C_1$  に対して負、 $C_2, \dots, C_n$  に対して正をとり、電荷点が  $D$  の外部に配置されるようにする。この方法は簡単で適用範囲が広い。拘束点の配置は、積分方程式法と共通の問題であるが、曲線が凹型の部分や曲率の大きな部分では密になるようにするとよい。対数関数の特異性の影響を避けて、原点は  $C_2$  の、 $\zeta_{l0}$  は各  $C_l$  の中心近くにとる。代用電

荷法では、境界がなめらかな解析曲線の場合には、電荷数とパラメータ  $q$  の増加に対して当初は誤差が指数関数的に減少する。パラメータ  $q$  のおおよその最適値としては、多少の試行錯誤は必要であるが、この指数関数的減少が成立する範囲で比較的大きな値を採用すればよい。

## 5. おわりに

代用電荷法を適用して、与えられたいくつかの Jordan 閉曲線を境界とする有界な多重連結領域から円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した。特に、ここでは複素対数関数に主値を用いて連続な近似写像関数の構成法を明示した。具体的な数値計算法の提案として、連続な近似写像関数の構成法を明示的に与えることの意義は大きい。

その結果、これまでの研究<sup>3)~8)</sup>とともに、(a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリット円板領域、(e) 円弧スリット円環領域という Nehari (1952) の基本的な標準スリット領域への簡単で高精度な数値等角写像が可能となった。他の様々なスリット領域への問題も、その多くは上記の問題の組合せや反転で扱うことが可能である。流体力学や電磁気学、電気工学等への具体的な応用を今後の課題としたい。

## 参 考 文 献

- 1) 天野 要：代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質，情報処理学会論文誌，Vol.32, No.1, pp.1-10 (1991).
- 2) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.53, No.3, pp.353-370 (1994).
- 3) 天野 要：円弧スリット領域への数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.36, No.2, pp.219-225 (1995).
- 4) 天野 要：代用電荷法による放射スリット領域への数値等角写像の方法，日本応用数理学会論文誌，Vol.5, No.3, pp.267-280 (1995).
- 5) 天野 要，渋谷良彦，土江雅之，杉原正顯：代用電荷法による平行スリット領域への数値等角写像の方法，日本応用数理学会論文誌，Vol.6, No.4, pp.353-371 (1996).
- 6) Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.19, No.4, pp.1169-1187 (1998).
- 7) 天野 要，岡野 大，緒方秀教：代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.41, No.4, pp.998-1008 (2000).
- 8) 天野 要，岡野 大，緒方秀教，下平博巳，杉原正顯：代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.42, No.3, pp.385-395 (2001).
- 9) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 10) 久原秀夫，米沢徹也：Neumann 関数と代用電荷法による等角写像，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-93-129, pp.1-10 (1993).
- 11) 久原秀夫，米沢徹也，小島俊輔：複連結領域の標準領域への等角写像の代用電荷法による構成，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-96-110, pp.67-77 (1996).
- 12) 久原秀夫，米沢徹也，安田和生：代用電荷法による多重連結領域の同心放射スリット円環領域への等角写像，電気学会電磁界理論研究会資料，EMT-97-83, pp.7-16 (1997).
- 13) Kythe, P.K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston (1998).
- 14) 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，東京 (1983).
- 15) 室田一雄：代用電荷法におけるスキームの「不変性」について，情報処理学会論文誌，Vol.34, No.3, pp.533-535 (1993).
- 16) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
- 17) 岡本 久，桂田祐史：ポテンシャル問題の高速解法，応用数理，Vol.2, No.3, pp.2-20 (1992).
- 18) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2, pp.125-142 (1986).
- 19) Trefethen, L.N. (Ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.14, No.1-2 (1986).

(平成 13 年 7 月 11 日受付)

(平成 14 年 2 月 13 日採録)



岡野 大 (正会員)

1968年生。1992年東京大学工学部物理工学科卒業。1995年同大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了。修士(工学)。現在、愛媛大学工学部情報工学科助手。研究

分野は数値解析。情報処理学会創立40周年記念論文賞受賞。日本応用数理学会会員。



緒方 秀教 (正会員)

1967年生。1990年東京大学工学部物理工学科卒業。1992年同大学大学院工学系研究科物理工学専攻修士課程修了。博士(工学)。現在、愛媛大学工学部情報工学科講師。研究

分野は数値解析。日本応用数理学会1998年度論文賞、情報処理学会創立40周年記念論文賞受賞。日本応用数理学会会員。



牧 直正

1977年生。2000年愛媛大学工学部情報工学科卒業。現在、同大学大学院理工学研究科博士前期課程情報工学専攻在籍中。研究課題は代用電荷法と数値等角写像。



天野 要 (正会員)

1948年生。1971年京都大学工学部電子工学科卒業。1978年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。現在、愛媛大学工学部情報工学科教授、総合

情報処理センター長。研究分野は数値解析を中心とする計算科学と情報科学。情報処理学会創立30周年記念論文賞、同40周年記念論文賞、日本応用数理学会1996年度論文賞受賞。日本数学会、日本応用数理学会、電子情報通信学会、日本心理学会、SIAM、ACM各会員。

---