連立非線形方程式について

7B-5

熊谷　泰幸　　平野　菅保
日本大学大学院　　日本大学

1．序

連立非線形方程式

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (1)$$

の求めたい１組の解（複素解を含む。）を必ず求めることのできる解法（反復法）は多くの人によって昔から研究されているが、そのような解法は存在していない。

よく用いられる解法としては、多変数のニュートン法がある。しかし、この解法も、連立非線形方程式（１）の非線形性が強いと、求めたい１組の解を必ず求めることができる、適当な出発値を変数毎に与えることは、１組の解を求めることと同様に、ときには、それ以上に非常にむずかしい。たとえば、係数がすべて実数であり、求めたい１組の解の中に複素数の解を含む場合には、全ての変数の出発値を実数にとると、ニュートン法では永久に１組の解を求めることができないことは明らかである。すなわち、このような場合には、大型の電子計算機では容易にできる多数桁による計算、多倍長計算を行っても求めたい１組の解には収束しない。

2．解法

連立非線形方程式（１）を x_j（$j=1, \cdots, n$）の点でテーラー展開して得られる

$$F_i(x_1+dx_1, \cdots, x_n+dx_n) = F_i(x_1, \cdots, x_n)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}dx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k F_i(x_1, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (2)$$

の３次以上の項を無視できるとして打ち切った

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}dx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k F_i(x_1, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (3)$$

と、一般によく用いられる２次以上の項を無視できるとして打ち切った

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)+\left(\sum_{j=1}^{n}dx_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)F_i(x_1, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (4)$$

とを用いて連立非線形方程式（１）の１組の解を求めることを試みた。今回は、１次の項の係数によってつくられる行列の行列式の絶対値が小さくなるために、ニュートン法で計算することが困難な場合には、（３）を用いて人が２次の項の計算の仕方を判断しながら行った。

3．計算例

例として、３元連立非線形方程式の場合について説明する。取り上げた３元連立非線形方程式は

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= 2u-v^2-19.89=0 \\ F_2(v, w) &= vw-3.318283=0 \\ F_3(u, w) &= u^2-w^2+0.1=0 \end{aligned} \qquad (5)$$

On a set of nonlinear equations

Yasuyuki KUMAGAI, Sugayasu HIRANO
NIHON, Univ.

である。なお、$u=x_1$, $v=x_2$, $w=x_3$とする。
この3元連立非線形方程式をテーラー展開し、3次以上の項を無視できるとして打ち切った方程式は

$$\begin{aligned} &2du-2vdv-dv^2=-F_1(u,v) \\ &wdv+vdw+dvdw=-F_2(v,w) \qquad (6) \\ &2udu-2wdw+du^2-dw^2=-F_3(u,w) \end{aligned}$$

となる。なお、今回は出発値を

$$u^{(0)}=0,\ v^{(0)}=0,\ w^{(0)}=0$$

としたために、1次の項の係数でつくられる行列の行列式の値が0となるために、ニュートン法で計算が行えない場合について例にあげた。この出発値を(6)式に代入する。

$$2du-dv^2=19.89 \qquad (7)$$
$$dvdw=3.318283 \qquad (8)$$
$$du^2-dw^2=-0.1 \qquad (9)$$

定数の絶対値の一番大きい(7)式から、dvを0とし、duを次のように計算する。

$$du^{(1)}=19.89/2=9.945$$

また、duを0とし、dvを次のように計算する。

$$dv^{(2)}=\sqrt{-19.89}=\pm 4.459821i$$

(補正値の肩の(j)はj次の項を使用して計算したことを意味する。)
補正値を比較すると、$|du^{(1)}|>|dv^{(2)}|$となっているので、$dv^{(2)}$を採用する。この$dv^{(2)}$を(8),(9)式に代入し、整理する。

$$dw^{(2)}=-0.7440395i \qquad (10)$$
$$du^2-dw^2=-0.1$$

ここでは、(10)の$dw^{(2)}$を採用する。これを(9)式に代入し、整理する。

$$du^{(2)}=\pm 0.8084521i \qquad (11)$$

これで、全ての補正値が計算できた。近似解は

$$u^{(1)}=u^{(0)}+du^{(2)}=\pm 0.8084521i$$
$$v^{(1)}=v^{(0)}+dv^{(2)}=\pm 4.459821i$$
$$w^{(1)}=w^{(0)}+dw^{(2)}=-0.7440395i$$

この4通りの近似解をそれぞれ出発値として、ニュートン法で計算する。近似解の1つの組み

$$u^{(1)}=\ 0.8084521i$$
$$v^{(1)}=\ 4.459821i$$
$$w^{(1)}=-0.7440395i$$

は、ニュートン法で3回反復計算をさせたら解に収束した。計算結果は次の通りである。

$$u^{(4)}=-2.749998\times 10^{-2}+8.057567\times 10^{-1}i$$
$$v^{(4)}=\ 1.802740\times 10^{-1}+4.469622i$$
$$w^{(4)}=\ 2.989505\times 10^{-2}-7.412027\times 10^{-1}i$$

また、真値は次の通りである。

$$u_T=-2.750000\times 10^{-2}+8.057603\times 10^{-1}i$$
$$v_T=\ 1.802748\times 10^{-1}+4.469618i$$
$$w_T=\ 2.989522\times 10^{-2}-7.412028\times 10^{-1}i$$

4．結論

連立非線形方程式を、テーラー展開した時の1次の項の係数によってつくられる行列の行列式の絶対値が小さくなるために、ニュートン法では解くことが困難なものが、連立非線形方程式を、テーラー展開した時の2次の項を使用した今回の解法を用いることにより、一応解くことができるようになった。さらに、2次の項を使用するということは、計算の途中で平方根の計算をするので、複数の補正値が得られる。そのために、複数の解が求まる可能性がでてきた。この例では、dvとdwがそれぞれプラスとマイナスの値がでてきて、結局4通りの補正値が得られ、それぞれ4つの別々の解に収束した。