2T-2

形状処理における一つの数値誤差対策

杉原厚吉　伊理正夫
東京大学 工学部 計数工学科

1．はじめに

グラフィックス，パターン認識，CADなどにおいて形状データを生成・変更するとき，数値計算誤差のために位相構造が誤って判定されると，データを壊したり無限ループに陥るなど，処理が破綻をきたすことがある．この意味において，計算は正確に行われるという仮定のもとで理論的に正しいアルゴリズムと，現実の計算機で正常に動作する計算機プログラムとの間には，大きなギャップが存在している．

この問題に対処するためにいくつかの方法[1,2]が提案されているが，いずれの方法も程度の差こそあれ"普通の計算"と比較してコストのかかる計算が要求されるため，気軽に利用できるものではなかった．

本稿では，普通の精度（たとえば単精度浮動小数点）ですべての計算を行っても破綻しないアルゴリズムの概念を提案し，この概念に属すアルゴリズムが形状処理の問題に対して実際に構成できることを，ボロノイ図作成法などを例にとって示す．

2．数値誤差によって破綻することのないアルゴリズム

「入力データ $\boldsymbol{d}$ が与えられたとき，正しい出力の集合 $A(\boldsymbol{d})$ の任意の一つの要素を出力せよ」という形の幾何学的問題を P とする．また，各 $\boldsymbol{d}$ に対して $A(\boldsymbol{d}) \subseteq \overline{A}(\boldsymbol{d})$ を満たすもう一つの集合 $\overline{A}(\boldsymbol{d})$（この集合の要素を<u>許容出力</u>とよぶ）が指定されているとする．

ここで正しい出力が複数個あり得るという定式化をするのは，図形が退化しているとき仮想的摂動を加えて得られるすべての可能な出力の集合を $A(\boldsymbol{d})$ とみなし，そのうちの一つが出力されれば満足するという立場をとりたいからである．一方，$\overline{A}(\boldsymbol{d})$ は，正しい出力が満たすべき条件の一部分を満たす出力の集合で，計算誤差があっても少なくともこれだけは満たしてほしいという最低限の要求を表現したものである．

引数 $\boldsymbol{x}$ に対する真の値が $f(\boldsymbol{x})$ である関数の，有限精度での実際の計算結果を $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ とする．「$\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ は，

(1) $\quad f(\boldsymbol{x}) - e \leqq \tilde{f}(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}) + e$

を満たすすべての値をとり得るがそれ以外の値は決してとらない」という性質を満たす正数 e が存在するとき，この計算の<u>精度</u>は e であるという．

さて，問題 P を解く一つの手続き W の中で使われている実数値関数を列挙したら $f_1, f_2, \ldots, f_m$ であったとする．$\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ とし，f_i の計算を精度 e_i で行ったときの入力データ $\boldsymbol{d}$ に対するこの手続きの可能な出力の集合を $R(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$ とする．手続き W は，任意の $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ に対して次の (2), (3), (4) を満たすとき<u>数値的に安定</u>であるという．

(2) W は必ず $R(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$ の一つの要素を出力する．

(3) $R(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) \subseteq \overline{A}(\boldsymbol{d})$.

(4) $\lim_{\boldsymbol{e}\to 0} R(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) \subseteq A(\boldsymbol{d})$.

(2) は W が途中で行き詰まることなく最後まで処理を実行して必ず出力を出すことを表し，(3) はその出力が許容出力であることを表し，(4) は十分な精度で計算を行えば出力が真の解に収束することを表している．

3．数値的に安定なアルゴリズムの例

誤差のある世界で幾何学的問題を解くとき，解が満たすべきすべての性質を常に満足させることは不可能であろう．しかし，解が満たすべき性質のうち，定性的なもののいくつかに着目し，少なくともそれだけは満たすような配慮を解法に加えることは可能な場合が多い．そこで，解が満たすべき定性的性質のある一部分を満たす出力の集合を $\overline{A}(\boldsymbol{d})$ とし，また，真の解（ただし退化が生じているときには摂動を加えて退化状態を解消したとき得られるすべての解）の集合を $A(\boldsymbol{d})$ とするという方針によって，数値的に安定な手続きを構成することができる．以下に，その例を二つ示す．ただし，紙面が限られているため，手続きの厳密な記述はせず，基本的な考え方のみを示す．

3．1．平面図形の和集合

有限個の線分で囲まれた連結な平面領域（すなわち多角形またはいくつかの多角形状の穴のあいた多角形）が2個与えられたとき，それらの和集合を成す図形を出力する問題を考える．それぞれの図形は，その領域を左側に見る有向線分の閉じた列（これを境界閉路という）と，その閉路上の頂点の座標値とで表されるものとする．和集合を計算するためには，境界閉路同士の交点を求めなければならない．一方の図形Kの一つの境界閉路Cがもう一方の図形Lの境界と交点をもつときには，

(6) そのような交点の数は偶数で，

(7) Cに沿って進むときLに入る交点とLから出る交

An Approach to Numerically Stable Processing of Geometric Data
Kokichi SUGIHARA and Masao IRI
Faculty of Engineering, University of Tokyo

点が交互に現れ．

(8) Cに沿って進むときLに入る点は，Lの境界に沿って進むときKから出る点になっている，

という性質が満たされる．そこで，交点の集合がこれらの条件を満たすことを数値的な交差判定結果より優先させることにより，数値的に安定な和集合作成手続きを構成できる．

3．2．ボロノイ図の作成

平面上の有限点集合 $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ に対して，

$$V(p_i) = \{p \mid p \in R^2,\ d(p, p_i) \leqq d(p, p_j),\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i\}$$

（ただし $d(p, q)$ は点 p と点 q のユークリッド距離を表す）を p_i のボロノイ領域といい，$V(p_1), \ldots, V(p_n)$ による平面の分割を S に対するボロノイ図という．S の要素を母点，2個のボロノイ領域の境界線分をボロノイ辺，3個以上のボロノイ領域に隣接する点をボロノイ点とよぶ．ボロノイ図は，ボロノイ点，ボロノイ辺，ボロノイ領域の隣接関係を表す位相構造と，ボロノイ点の座標を表す数値とで表現されるものとする．

ボロノイ図を構成する一つの代表的方法は逐次母点添加法である[3]．これは，少数の母点に対するボロノイ図から出発し，1個1個新たな母点を添加しながらボロノイ図を更新していく方法である．母点 $p_1, \ldots, p_{l-1}$ に対するボロノイ図 V_{l-1} が得られているとき，新たな母点 p_l の添加によって取り除かれるべきボロノイ点の集合 T は次の条件 (9), (10), (11) を満たすことがわかる[4]．

(9) T は空ではない．

(10) T に属す点とそれらをつなぐ辺によってできる V_{l-1} の部分グラフは木である．

(11) T の要素のうちボロノイ領域 $V(p_i)$ の境界上にあるもの全体を $T(p_i)$ と書くと，すべての $i = 1, \ldots, l-1$ に対して，$T(p_i)$ に属す点とそれらをつなぐ辺によってできる部分グラフも木である．

そこで，これらの位相的な性質の保持を数値的判定結果より優先させることによって，数値的に安定な手続きを構成できる．

本手法を PC-FORTRAN 言語でプログラム化し，NEC PC-9801VX で走らせてその振舞いを見た．図1は，ランダムに配置した 20 個の母点に対する出力例である．(a) はすべての浮動小数点演算を単精度で実行した場合，(b) は一様乱数を用いて浮動小数点演算にある程度の人工的誤差を加えた場合である．図2(a) は，一つの円周付近に配置した 2000 個の母点に対する出力で，(b) はその一部分の拡大図である．計算誤差が生じたり母点が密集していたりしても位相的につじつまの合った結果が得られており，数値的に安定であることがわかる．

4．おわりに

位相構造の無矛盾性を優先させることにより数値的に安定な形状処理手続きの構成が可能であることを，ボロノイ図の作成問題などを例にとって示した．今後，同様の方針を他の幾何学的処理にも適用し，数値誤差があっても破綻しないアルゴリズムの概念を確立していきたい．

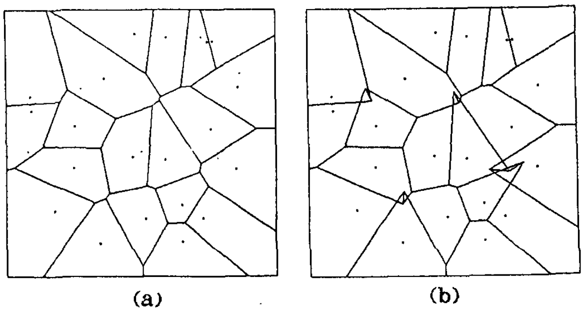
参考文献

[1] D. H. Greene and F. Yao: Finite-resolution computational geometry. *Proceedings of the 27th ACM Annual Symposium on Foundations of Computer Geometry*, Toronto, pp. 143-152, October, 1986.

[2] 杉原厚吉，伊理正夫：計算誤差による暴走の心配のないソリッドモデラの提案．情報処理学会論文誌，vol. 28 (1987), pp. 962-974.

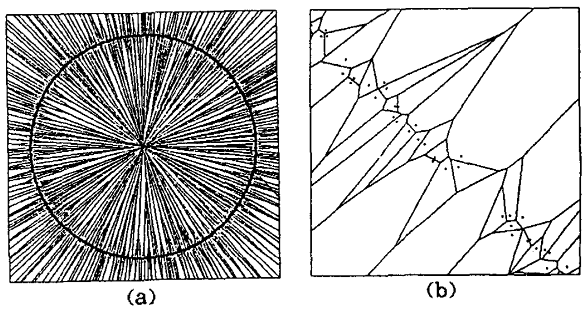
[3] T. Ohya, M. Iri and K. Murota: Improvements of the incremental method for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 27 (1984), pp. 306-336.

[4] 伊理正夫，杉原厚吉：計算誤差を考慮した幾何的アルゴリズム．情報処理学会アルゴリズム研究会報告，88-AL-1-1, 1988.



(a) (b)

図1．ランダムに配置された 20 個の母点に対する出力結果



(a) (b)

図2．同一円周付近に配置された 2000 個の母点に対する出力結果