

代用電荷法とNewton法に基づく
外部逆等角写像の数値計算法

4D-4

高松孝安 天野 要 安倍 齊

(愛媛大学工学部)

1. まえがき

内部問題¹⁾の場合と同様に、外部 Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似して、任意の Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像を簡潔かつ高精度に計算することができる²⁾。本稿では、その近似写像関数と導関数の記述が簡潔であることに着目し、内部問題の逆写像^{3), 4)}に対応する外部問題の逆写像、すなわち、単位円の外部から任意の Jordan 領域の外部への等角写像の計算法を記す。この計算法は、Newton 法で1点ごとの反復計算を行うものである。しかし、境界の対応を1度定めれば、領域内の対応が簡単に計算できるという特徴は、(汎用的な数値解法である差分法や有限要素法と一概に比較はできないものの)外部問題では重要である。

2. 外部等角写像と近似写像関数²⁾

$z (= x+iy)$ 平面上の任意の Jordan 曲線を C , C で囲まれた領域の外部を D とすれば、 D から w 平面上の単位円の外部 $|w| > 1$ への等角写像 $w = f(z)$ は、正規化条件 $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) > 0$ の下に一意的に定まり、Laurent 級数

$$w = f(z) = \gamma^{-1}z + a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots \quad (1)$$

で与えられる。 $\gamma (> 0)$ は問題の領域の容量である。 C の内側に原点をとれば、(1)式は

$$f(z) = z \exp\{-\log \gamma + g(z) + ih(z)\} \quad (2)$$

と書くことができる。 $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数で、それぞれ、境界条件と正規化条件

$$g(z) = \log \gamma - \log |z|, \quad z \in C, \quad (3)$$

$$g(\infty) = h(\infty) = 0 \quad (4)$$

を満たさなければならない。

代用電荷法に基づいて、この $g(z)$ と $h(z)$ を D の外部、すなわち、 C の内側の領域に配置された N 個の電荷点 $\zeta_i (= \xi_i + i\eta_i)$ を極とする複素対数ポテンシ

ヤルの実部と虚部の1次結合で近似して、次のような簡潔かつ高精度な近似写像関数を与えることができる。

$$W = F(z) = z \exp\{-\log \gamma + G(z) + iH(z)\}, \quad z \in \bar{D} \quad (5)$$

$$G(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \log |z - \zeta_i| \quad (6)$$

$$H(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) \quad (7)$$

ここに、 $\bar{D} = D + C$ であり、 W, F, G, H, γ 等の大文字は近似値を表す。未定係数である電荷 Q_i は境界 C 上に選ばれた N 個の拘束点 z_j で境界条件(3)を満たすように定められる。また、正規化条件から $\sum_{i=1}^N Q_i = 0$ でなければならない。すなわち、 Q_i と $\log \gamma$ は拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \log |z_j - \zeta_1| \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \\ \log \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log |z_j| \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

の解である。

3. 逆写像の数値計算法

内部問題^{3), 4)}の場合と同様に、近似写像関数(5)を

$$W = R(z) \exp\{i\theta(z)\} = \exp\{P(z) + i\theta(z)\} \quad (9)$$

とおけば、 $P(z)$, $\theta(z)$ およびその導関数を

$$P(z) = \log R(z) = \log |z| - \log \gamma + G(z), \quad (10)$$

$$\theta(z) = \arg z + H(z), \quad (11)$$

$$P_x = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (x - \xi_i) / |z - \zeta_i|^2, \quad (12)$$

$$P_y = y/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (y - \eta_i) / |z - \zeta_i|^2, \quad (13)$$

$$\theta_x = -y/|z|^2 + \sum_{i=1}^N Q_i (y - \eta_i) / |z - \zeta_i|^2, \quad (14)$$

$$\theta_y = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (x - \xi_i) / |z - \zeta_i|^2 \quad (15)$$

と簡潔に記述することができる。

本稿では、まず、 $w = r \exp(i\theta)$ 平面上の等偏角線 $\theta = \theta_c$ ($-\pi < \theta_c \leq \pi$) の逆写像 $\theta(z) = \theta_c$ の計算法を記す。 $\theta(z) = \theta_c$ 上の1点を z_k とし、次の1点 z_{k+1} を以下の手順で計算することができる。

1° z_k から接線方向に距離 $t (< 1)$ 離れた点の計算。

$$z_{k+1} = z_k + t \exp[i\{\arg(\nabla \theta(z_k)) - \pi/2\}] \quad (16)$$

Numerical inverse conformal mapping of exterior domains based on the charge simulation method combined with Newton's method

Takayasu TAKAMATSU, Kaname AMANO and Hitoshi ABE (Ehime University)

2° Newton 法による z_{k+1} の近似値の計算.

$$z_{k2} = z_{k1} - \Delta t \exp[i \arg(\nabla \theta(z_{k1}))] \quad (17)$$

$$\Delta t = (\theta(z_{k1}) - \theta_0) / |\nabla \theta(z_{k1})| \quad (18)$$

3° $|\theta(z_{k2}) - \theta_0| \leq \varepsilon_0$ ($\ll 1$) であれば $z_{k+1} = z_{k2}$, $k = k+1$ において 1° に戻る. $|\theta(z_{k2}) - \theta_0| > \varepsilon_0$ であれば, $z_{k1} = z_{k2}$ において 2° に戻る.

出発点 z_0 は, z_{k1} に適当な初期値を与えて, C 上で 2° と 3° の手続きを繰り返して求めることができる. また, 3° で $R(z_{k+1}) > r_u$ (> 1) となった場合にはこの等偏角線の計算を終了する.

しかし, 偏角の計算には注意を要する. すなわち, 計算の途中で (18) 式の分子が \arg 関数の $\pm\pi$ の不連続線を越えてはならない. そこで, $\theta_0 \approx \pi$ の場合には, $\theta(z_{k1}) < 0$ になれば $\theta(z_{k1}) = \theta(z_{k1}) + 2\pi$ において (18) 式を計算する. ($\theta_0 \approx -\pi$ の場合には, $\theta(z_{k1}) > 0$ になれば $\theta(z_{k1}) = \theta(z_{k1}) - 2\pi$ とおく.) この問題は (7) 式の $H(z)$ の計算にも存在する. しかし, $Q_i = 0$ の関係を利用して, 不連続線を C の内側の領域に閉じ込めたり⁵⁾, C が原点に対して starlike であれば, より簡単に解消することも可能である²⁾.

等絶対値線 $r = r_0$ ($1 \leq r_0 \leq r_u$) の逆写像 $R(z) = r_0$ すなわち $P(z) = p_0$ ($p_0 = \log r_0$) の計算法も等偏角線の場合と同じである. しかし, 外部問題では, $z \rightarrow \infty$ で $w \rightarrow \infty$ かつ $z \in \bar{D}$ で $w(z) \neq 0$ であるから, 収束条件は相対誤差を用いて $|R(z_{k2}) - r_0| / r_0 \leq \varepsilon_r$ ($\ll 1$) すなわち $|P(z_{k2}) - p_0| \leq \varepsilon_r$ とすべきである.

1点 w_0 の逆写像は $R(z) = r_0$ すなわち $P(z) = p_0$ と $\theta(z) = \theta_0$ の交点として計算することができる.

4. 誤差

外部問題では相対誤差を用いる. この計算法では, $z_0 = f^{-1}(w_0)$ の代わりに, $Z_0 = F^{-1}(w_0)$ を収束条件 ε_N の Newton 法で計算する. したがって, $w_k = F(z_k)$ として, Newton 法に起因する w 平面上の誤差は

$$\varepsilon_N(w_0) = |w_k - w_0| / |w_0| \leq \varepsilon_N \quad (19)$$

である. 一方, $w_0 = f(Z_0)$ として, 正則関数の最大値の原理により, $F(z)$ の公式誤差は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(w_0) &= |w_0 - w_0| / |w_0| \\ &\leq \max_C |F(z) - f(z)| = \varepsilon_F \\ &\approx 2 \max_{1/2} |F(z_{j+1/2}) - 1| \end{aligned} \quad (20)$$

であることが知られている²⁾. \max_C は C 上での評価を示し, $z_{j+1/2}$ は z_j と z_{j+1} の中間点である. ここで, 正則関数による平面の局所的な拡大率がその方

向に依存せず導関数の絶対値に等しいことを利用し, w 平面上の誤差を z 平面上の誤差に変換して,

$$\begin{aligned} \varepsilon_R(z_0) &= |z_k - z_0| / |z_0| \\ &\leq (|z_k - z_0| + |z_0 - z_0|) / |z_0| \end{aligned} \quad (21)$$

$\approx \{|w_k - w_0| / |F'(Z_0)| + |w_0 - w_0| / |f'(z_0)|\} / |z_0|$
 $\leq |w_0 / z_0| \varepsilon_N / |F'(Z_0)| + |w_0 / z_0| \varepsilon_F / |f'(z_0)|$
 を得る. 近似写像関数と Newton 法の精度が十分に高ければ,

$$\varepsilon_R(z_0) \leq |w_k / z_k| (\varepsilon_N + \varepsilon_F) / |F'(z_k)| \quad (22)$$

となる. さらに, 正則関数の性質を利用して,

$$\varepsilon_R(z_0) \leq (\varepsilon_N + \varepsilon_F) / \min_C |z F'(z)| \quad (23)$$

となることを示すことができる.

等絶対値線 $r = r_0$ または等偏角線 $\theta = \theta_0$ の逆写像の場合にも, w_k から $r = r_0$ または $\theta = \theta_0$ への垂線の足を w_0 と考えれば, ε_N をそれぞれ ε_r と ε_θ に置き換えて, 以上の議論がそのまま成立する.

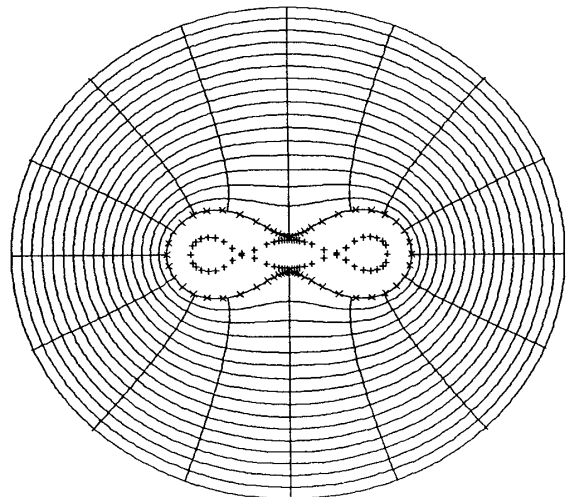
5. 計算例 (Cassini の楕形)

$$\begin{aligned} \text{境界 } \{(x+1)^2 + y^2\} \{(x-1)^2 + y^2\} &= a^4 \\ a &= 2^{1/32} \end{aligned}$$

$$\text{計算条件 } N = 64, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 10^{-5}$$

$$\text{計算結果 } \varepsilon_F = 3.4 \times 10^{-5}$$

$$\max \varepsilon_R \approx (\varepsilon_F + \varepsilon_r) / \min_C |z f'(z)| = 1.0 \times 10^{-3}$$



参考文献

- 1) 天野 要: 情論誌, 28(7), 697-704(1987).
- 2) 天野 要: 情論誌, 29(1), 62-72(1988).
- 3) 天野 要, 高松孝安, 安倍 齊: 本全国大会.
- 4) 天野 要, 高松孝安, 安倍 齊: 準備中.
- 5) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北 (1983).