

対応の与えられた点集合間のミニマックス近似問題について

2D-6

今井 桂子

九州工業大学情報科学センター

今井 浩

九州大学工学部

1. はじめに

2つの似かよった点集合の間の最適な当てはめを求める問題は、パタン認識・画像処理などでよく現われる。本稿では、 n 点同士の1対1対応の与えられた平面上の点集合 S, T が与えられたとき、 S を平行移動と回転することにより対応する点同士の距離の最大値が最小になるようにする問題を考え、それに対するアルゴリズムを与える。

このミニマックス型の問題は、例えばピングリッドアレイ型LSIを円形の穴が正方格子状に並んだプリント基板上に自動実装する装置を実現する際に現われる([4]; 図1参照)。そこでは、LSIのピンを点とみなした点集合と、円形の穴の中心点の集合との間の対応する点間の距離のミニマックス値が円の半径以下であるとき、かつそのときに限りLSIを基板に実装することが可能である。関連した問題として、プリント基板のパターンが円ではなく正方形が格子状に配列された問題があり、その問題に対しては既に $O(n \log n)$ の手間のアルゴリズムが与えられている[3]。

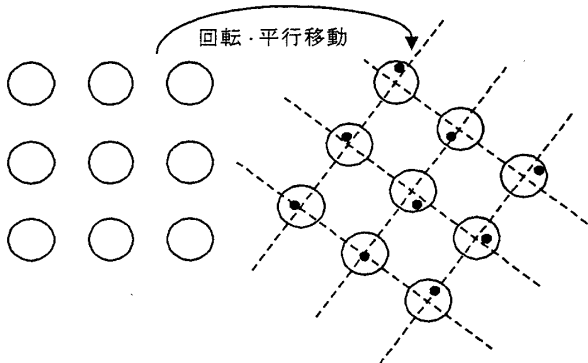


図1. ピングリッドアレイ型LSIの実装問題

本稿では、まずこの問題を、 n 個の3変数関数の最大値をとる関数の最小化問題として定式化する。 n 個の1或は2変数関数の最大値(或は最小値)を値としてとる関数を求めることは、近年の計算幾何学における中心的な話題であり、1変数の場合は特にDavenport-Schinzel列という名の下で研究されている[1,2]。3変数関数に関する問題は、まだ殆ど調べられておらず、その点でも以降の議論はおもしろい。この定式化に基づき、ここでの3変数関数の最大値関数の性質を調べ、その性質を利用してこの問題に対する $O(n^2 \lambda_{10}(n) \log n)$ の手間のアルゴリズムを与える。ここで、 $\lambda_{10}(n)$ は10次のDavenport-Schinzel列の最大長であり、それ自身

は $\alpha(n)$ をAckermann関数の逆関数としたとき $O(n2^{O(\alpha(n)^4)})$ であることが示されている(例えば[1])。 $\lambda_{10}(n)$ は n に関してほとんど線形に近い関数である。また、以下では定数サイズの三角関数を一部含む多項式の根が定数時間で厳密に求められると仮定する。

2. 問題の定式化

相異なる n 点よりなる2つの点集合

$$S = \{s_i = (x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

$$T = \{t_i = (u_i, v_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

において、点 s_i は点 t_i に対応しているとする($i = 1, \dots, n$)。このとき問題は、 S の点集合を回転移動と平行移動することにより対応する点同士の距離の最大値を最小にすることである。 S の点集合を角度 θ 回転($0 \leq \theta < 2\pi$)し、 $(-x, -y)$ 平行移動すると点 s_i の座標は

$$(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta - x, x_i \sin \theta + y_i \cos \theta - y)$$

となる。このときの s_i と t_i との距離の二乗を値としてとる関数を $f_i(\theta, x, y)$ とする:

$$f_i(\theta, x, y) = (x - x_i(\theta))^2 + (y - y_i(\theta))^2$$

但し $x_i(\theta) = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta - u_i$

$$y_i(\theta) = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta - v_i$$

と定める。このとき、関数 f_i の最大値をとる関数

$$f(\theta, x, y) = \max_i f_i(\theta, x, y)$$

を考えると、このミニマックス型の問題は次のように表される:

$$\min_{\theta, x, y} f(\theta, x, y)$$

$(x_i(\theta), y_i(\theta))$ を座標とする平面上の点を $p_i(\theta)$ とすると、 θ を固定したとき $f(\theta, x, y)$ を x, y に関して最小化する問題は、点 $p_i(\theta)$ ($i = 1, \dots, n$)に対する最小包含円問題である。

3. 関数 $f(\theta, x, y)$ の性質

以下では簡単のため、任意の θ に対して $p_i(\theta)$ ($i = 1, \dots, n$)は全て相異なるとする。関数 $z = f(\theta, x, y) = \max_i f_i(\theta, x, y)$ を (θ, x, y) 空間に射影すると、 (θ, x, y) 空間の分割が得られる。この分割を n 関数 f_i の最大値図と呼ぶ。この分割は3次元の領域とその2つの交わりで構成される面、3つの交わりで構成される辺、4つの交わりで構成される点よりなる。以下では、これらの構成要素の数の上限を与える。

まず、 n 個の3変数関数 $f_i(\theta, x, y)$ の性質を調べる(以下、随時変数を省略して関数を表す)。

(1) 任意の $i \neq j$ に対して $f_i(\theta, x, y) = f_j(\theta, x, y)$ は連結な曲面となる。

(2) 任意の相異なる i, j, k に対して $f_i = f_j = f_k$ は θ をパラメタとする高々2点で不連続な曲線となる((8)参照)。

On the Minimax Approximation of Two Corresponding Sets of Points

Keiko IMAI*, Hiroshi IMAI†

*Kyushu Inst. Tech., †Kyushu Univ.

(3) 任意の相異なる i, j, k, l に対して $f_i = f_j = f_k = f_l$ は高々 8 個の交点をもつ。

この性質より、最大値図での点の数は $O(n^4)$ であることがわかる。よりよい上界は次のようにして得られる。

元の平面での n 点のうち特に $p_i(\theta), p_j(\theta)$ に着目する。 $k \neq i, j$ に対して、関数 $g_k^+(\theta), g_k^-(\theta)$ を次のように定める。ここで、 $p_i(\theta), p_j(\theta), p_k(\theta)$ の外心を q とし、それと線分 $p_i(\theta)p_j(\theta)$ の中点との距離を d とする。

(4.1) $p_k(\theta)$ が $p_i(\theta)p_j(\theta)$ の右側にある:

$$g_k^+(\theta) = \begin{cases} +d & (q \text{ が } p_i(\theta)p_j(\theta) \text{ の右側にある}) \\ -d & (q \text{ が } p_i(\theta)p_j(\theta) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

$$g_k^-(\theta) = -\infty$$

(4.2) $p_k(\theta)$ が $p_i(\theta)p_j(\theta)$ の左側にある:

$$g_k^+(\theta) = -\infty$$

$$g_k^-(\theta) = \begin{cases} -d & (q \text{ が } p_i(\theta)p_j(\theta) \text{ の右側にある}) \\ +d & (q \text{ が } p_i(\theta)p_j(\theta) \text{ の左側にある}) \end{cases}$$

(4.3) $p_k(\theta)$ が $p_i(\theta)p_j(\theta)$ 上にある:

$$g_k^+(\theta) = g_k^-(\theta) = -\infty$$

このとき

(5) $\theta = \theta'$ と f_i, f_j, f_k の交点が最大値図上にあるならば、

$$g_k^+(\theta') = \max_{l \neq i, j} g_l^+(\theta')$$

であるか

$$g_k^-(\theta') = \max_{l \neq i, j} g_l^-(\theta')$$

である。

そこで、1 変数関数 $g_l^+(\theta)$ ($l \neq i, j$) の最大値関数を g^+ とし、1 変数関数 $g_l^-(\theta)$ ($l \neq i, j$) の最大値関数を g^- とする。これらの最大値関数に関して、最大値をとる関数が θ の左右で変わるとき、その θ を区分値という。

(6) f_i, f_j, f_k, f_l の交点が最大値図上にあり、この交点の θ 座標が θ' であるとする。このとき、

(6.1) $p_k(\theta'), p_l(\theta')$ が $p_i(\theta')p_j(\theta')$ に関して右側にあるならば、この交点は g^+ の区分値に対応する;

(6.2) $p_k(\theta'), p_l(\theta')$ が $p_i(\theta')p_j(\theta')$ に関して左側にあるならば、この交点は g^- の区分値に対応する;

(6.3) $p_k(\theta'), p_l(\theta')$ が $p_i(\theta')p_j(\theta')$ に関して別の側にあるならば、この交点は $g^+ + g^- = 0$ の解に対応する;

そこで、 g^+, g^- の性質についてみてみると

(7.1) $g_k^+ = g_l^+ \neq -\infty$ ならば $f_i = f_j = f_k = f_l$ である;

(7.2) $g_k^- = g_l^- \neq -\infty$ ならば $f_i = f_j = f_k = f_l$ である;

さらに、

(8) 任意の $k \neq i, j$ に対して、 $p_i(\theta), p_j(\theta), p_k(\theta)$ が同一直線上に存在するような θ は高々 2 つしか存在しない。

すなわち、 g_k^+, g_k^- が $-\infty$ の値をとるところで不連続となるのは高々 2 点である。

以上の議論により、 g^+, g^- での交点の数は、 $8+2=10$ 次の Davenport-Schinzel 列の最大長のオーダでおさえられ、最大値図において $f_i = f_j$ の面上にある点の数は $O(\lambda_{10}(n))$ であることがいえる。すると、 i, j を相異なる $1, \dots, n$ の整数の対全てについて考えることにより、最大値図での点数は、 $O(n^2 \lambda_{10}(n))$ であることがわかる。

4. アルゴリズム

3 節の議論をそのままアルゴリズムにすることが考えられ、もう少し議論を展開した後、次の結果が得られる。

定理. $f(\theta, x, y)$ の最小化問題は、 $O(n^2 \lambda_{10}(n) \log n)$ の手間で解くことができる。□

但し、このアプローチの問題点は、基本的に n 点の問題を n^2 回解くので、 $\Omega(n^3)$ の手間がどうしてもかかってしまうことである。

このアルゴリズムよりは、当面最悪の場合の手間は悪いが、平均的にはより高速であろうと思われる次のようなアルゴリズムが考えられる。 θ を固定したとき、 $f(\theta, x, y)$ を最小にする問題は、 n 点 $p_i(\theta)$ に対する最小包含円問題である。最小包含円は、 n 点のうち 2 或は 3 点で決まっている。 θ を固定したときの最小包含円を定めている点の集合を、 θ に関する有効点集合と呼ぶ。 θ を 0 から 2π まで動かしたとき、有効点集合は θ の幾つかの値のところで不連続に変わる。そのような θ の値を、臨界値と呼ぶ。一般に、適当な値 θ に対して、 θ を次第に増加させていったとき初めてあたる臨界値は、 $O(n)$ の手間で求めることができる。また、3 節の議論を適用することにより、臨界値の総数は $O(n^2 \lambda_{10}(n))$ であることがいえる。すると、 $\theta=0$ から始めて、臨界値を小さい順に求めていきながら $f(\theta, x, y)$ を最小化するアルゴリズムが考えられる。

このアルゴリズムの手間は、上の議論からだけでは $O(n^3 \lambda_{10}(n))$ であることしかいえないが、臨界値の総数は上の上界よりかなり小さいと予想されるので、実際的には効率よいと考えられる。

5. まとめ

本稿では、 n 個の 3 変数関数の最大値関数の性質を調べるというアプローチにより、対応の与えられた点集合間のミニマックス近似問題がある程度効率よく解けることを示した。但し、最大値関数に関して示した上界等はきついものであるかどうかはわかっておらず、改良の余地が残っている。

謝辞 本研究の一部は、文部省科学研究費奨励研究 (A) 63750361 の援助を受けた。

参考文献

- [1] H. Edelsbrunner, J. Pach, J. T. Schwartz and M. Sharir: On the Lower Envelope of Bivariate Functions and Its Applications. *Proceedings of the 28th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 1987, pp.27-37.
- [2] S. Hart and M. Sharir: Nonlinearity of Davenport-Schinzel Sequences and of Generalized Path Compression. *Combinatorica*, Vol.6 (1986), pp.151-177.
- [3] 今井浩, 炭野重雄, 内藤史門: 点集合の正方格子度判定アルゴリズムについて. 情報処理学会第 36 回 (昭和 63 年前期) 全国大会, 4B-4, pp.63-64.
- [4] 内藤史門: 産業用ロボットへの視覚センサ応用. センサ技術, Vol.7, No.5 (1987), pp.90-93.