2X-6

移流拡散問題の特性曲線積分法

(岡山理科大学理学研究科)
榊原　道夫

1. まえがき

移流拡散問題の初期値問題

du/dt-div(a grad u)+div(b u)=0　(1)

u(x,0) = f(x)　(2)

に対する数値解法について考察する.ここで a は定数, b=(b1,b2,...,bn) は流体の速度ベクトルである. 上記問題に対する数値解法としては有限差分法および有限要素法が考えられる. もしも我々が任意の時間スッテプ s に対して絶対安定な数値解を得ようとするならば, CDE(1)を時間について, インプリシットな差分スキームを適用しなければならない. その場合我々が初期値問題に対する精度のよい数値解を得ようとするならば, 大型の線形方程式を解かなければならない. 筆者は[1]において絶対安定なイクスプリシットなスキームを提案している. 本報告において筆者は, 本スキームの理論的安定の考察および実験的検証を示す.

2. 特性曲線積分法

問題(1),(2)に対する特性曲線積分スキームは1次元の場合

uh(x,js)=

$(h/s)\Sigma_{i=-N}^{N}$ G(x,Y<i>)uh(y<i>,(j-1)s)

, x,y<i>∈R　(3)

となる. ここで

y<i>=i*h (h is a mesh size in space)　(4)

y<i>=Y<i>+b(Y<i>)s　(5)

G(x,y)=exp[-k | x-y |]/(2ak)

(∵ k=1/as)　(6)

であり, (5)は作用素 $-d^2/dx^2+k$ の基本解である. また方程式

$-d^2 G(x,y)/dx^2 + kG(x,y) = (1/a)\delta(x-y)$

を満足する. ここで δ(x-y)はディラックのデルタ関数である.

3. 安定性

スキーム(3)の安定性について次の定理が成立する.

[定理1] 時間増分 s に依存しない定数 C で不等式

‖uh(x,is))‖ ≦ C‖f(x)‖　(7)

が成立する. すなわちスキーム(3)は無条件安定である. ■

4. 数値例

次に定理1が成立していることを数値例より考察する. 問題P1,P2:

P1) u(x,0)=1 for x≦0,

u(x,0)=0 for x>0

P2) $u(x,0)=\exp[-x^2]$

について考えよう. Table 1 および Table 2はP2)に対する解, Figure 1はP1に対する解である. 数値例より定理1の成立していることが確認できる. またP2に対する解の相対誤差より比較的大きい時間ステップをとっても精度の良い解が得られている.

文献:[1]M.Sakakihara and M.Ikeuchi , Characteristicsintegration method for one-dimensional initial value problem of convective diffusion equation ,Numer. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, Proceeding of 4th International Conf. 1003-1010 (1985).

Characteristics integration method of convective diffusion problem

Michio Sakakihara
The Graduate School of Science of Okayama University of Science

Δt	present solution	exact solution	relative error
0.005	1.009179	0.990123	0.019245
0.01	0.981818	0.980486	0.001359
0.05	0.917021	0.910711	0.006641
0.1	0.840903	0.839138	0.002103
0.2	0.708099	0.728975	0.028637

Table 1. Numerical solution and its relative error
Here h=0.05, a=b=1.0, N=100.

Table 2 gives the numerical solution and its relative error at the time T=1.0=$n\Delta t$ (n=1,2,4,5) on x=0.0.

n	present solution	relative error
1	0.370757	0.012591
2	0.371562	0.014789
4	0.371245	0.013924
5	0.371450	0.014483

Table 2. Accuracy of present solution
Here h=0.05, a=b=1.0, N=100. The exact solution is 0.366148.

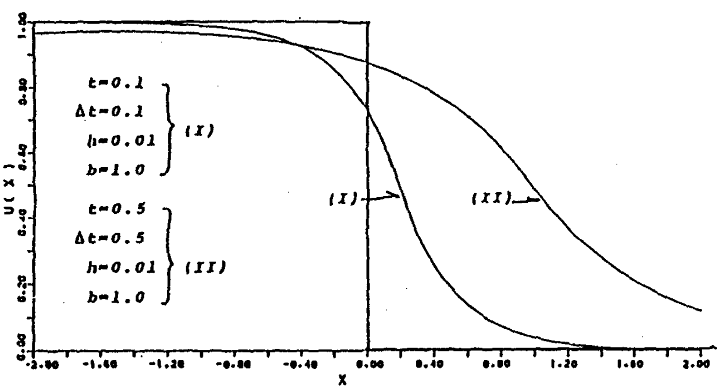

Figure 1. Numerical solution
Here a=1.0. The diffusion number for case (I) is 1000. For case (II) the diffusion number is 5000.