Markoffの公式の誤差解析

1X-3

秦野和郎(愛知工大・電子)

1．まえがき Newton補間公式を微分して得られるMarkoffの公式は数値微分公式として有用な事がある。spline補間などのように端点における微係数が必要なときにこの公式を適用しうる。そのときの打切り誤差を知るにはMarkoffの公式の誤差についての知識を必要とする。ここではMarkoffの公式の誤差について述べる。

2．Newton補間公式 Newtonの補間公式は

$$f(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_m] + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)f[x_0,x_1,\cdots,x_m,x] \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで右辺の最後の項は剰余項である。この形では扱かいにくいので最後の項に積分剰余項を持つTaylor展開式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0)+\int_{x_0}^{x_m}f^{(m+1)}(y)\frac{(x-y)_+^m}{m!}dy \quad (2.2)$$

を代入すると式(2.1)右辺最後の項は

$$\int_{x_0}^{x_m}f^{(m+1)}(y)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_m)}{m!}g_{m+1}[x_0,x_1,\cdots,x_m,x;y]dy \quad (2.3)$$

と書き改められる。ここで

$$g_{m+1}(x;y)=(x-y)_+^m=\begin{cases}(x-y)^m & : x\geq y\\ 0 & : x<y\end{cases} \quad (2.4)$$

である。これを若干変形するとNewton補間公式は

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{i=0}^{m}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_i]+\int_{x_0}^{x_m}f^{(m+1)}(y)\hat{G}_m(x;y)dy \\ \hat{G}_m(x;y)=-\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})g_{m+1}[x_0,x_1,\cdots,x_i;y] \end{cases} \quad (2.5)$$

となる。次に等間隔分点に対するNewton補間公式を得るために式(2.5)で
$x=x_0+hs$, $y=x_0+ht$ $(h=x_{i+1}-x_i)$ とおき

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{1}{h^k k!}\Delta^k f(x_0), \quad g_{m+1}[0,1,\cdots,i;t]=\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}(j-t)_+^m \quad (2.6)$$

を使うと、等間隔分点に対するNewton補間公式

$$\begin{cases} f(x_0+hs)=\sum_{i=0}^{m}\frac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!}\Delta^i f(x_0)+h^{m+1}\int_0^m f^{(m+1)}(x_0+ht)G_m(s;t)dt & (2.7)\\ G_m(s;t)=-\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}\frac{s(s-1)\cdots(s-i+1)}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}(j-t)_+^m & (2.8) \end{cases}$$

を得ることができる。

3．Markoffの公式 式(2.7)をsでν回微分し$s=0$とおくとMarkoffの公

Error Analysis of Markoff's Formula
Kazuo HATANO
AICHI Institute of Technology

式を得ることができる。

$$s(s-1)\cdots(s-i+1)=\sum_{r=0}^{i} S_i^{(r)} s^r \qquad (3.1)$$

とおくと（$S_i^{(r)}$ は第一種の Stirling 数）

$$\frac{d^\nu}{ds^\nu}\{s(s-1)\cdots(s-i+1)\}=\sum_{r=\nu}^{m} S_i^{(r)}\frac{r!}{(r-\nu)!}s^{r-\nu} \qquad (3.2)$$

である。これを使うと式(2.7)から Markoff の公式

$$\begin{cases} h^\nu f^{(\nu)}(x_0)=\displaystyle\sum_{i=\nu}^{m}\frac{\nu!}{i!}S_i^{(\nu)}\Delta^i f(x_0)+h^{m+1}\int_0^m f^{(m+1)}(x_0+ht)\,G_m^{(\nu,0)}(0;t)\,dt & (3.3)\\ G_m^{(\nu,0)}(0;t)=-\displaystyle\frac{\nu!}{m!}\sum_{j=0}^{m}(j-t)_+^m\sum_{i=\nu}^{m}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\frac{S_i^{(\nu)}}{i!} & (3.4)\end{cases}$$

が得られる。式(3.4)は打切りべき関数 $(j-t)_+^m$ の線型結合による表現のため、数値的安定性が悪く有用ではないのでこれを B-spline の線型結合の形に書き直す。

$k-1$ 次の正規化された B-spline を

$$N_{j,k}(x)=(t_j-t_{j-k})\,g_k[t_{j-k},t_{j-k+1},\dots,t_j;x] \qquad (3.5)$$

と定義する。

$$N_{j,m+1}(t)=(x_j-x_{j-m-1})\sum_{r=j-m-1}^{j}\frac{(x_r-t)_+^m}{(x_r-x_{j-m-1})\cdots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\cdots(x_r-x_j)} \qquad (3.6)$$

において $x_j=j$ とすると、

$$N_{j,m+1}(t)=\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r\binom{m+1}{r}(j-r-t)_+^m \qquad (3.7)$$

となる。この式から

$$\sum_{j=1}^{m}A_jN_{j,m+1}(t)=\frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m}(j-t)_+^m\sum_{r=j}^{m}(-1)^{r-j}\binom{m+1}{r-j}A_r \qquad (3.8)$$

を得ることができる。式(3.8)右辺と式(3.4)の右辺を比較すると、

$$G_m^{(\nu,0)}(0;t)=\sum_{j=1}^{m}A_j^{(\nu)}N_{j,m+1}(t) \qquad (3.9)$$

における係数 $A_j^{(\nu)}$ を $A_m^{(\nu)}, A_{m-1}^{(\nu)}, \dots, A_1^{(\nu)}$ の順に求めることができる。例として $m=5$ のときの $A_j^{(\nu)}$ を左表に示す。多くの m に対してこのような表を作ることができる。又 $B_j=\int_0^m N_{j,m+1}(t)\,dt$ も数表の形にしておくことができる。例として $m=5$ のときの B_j を上表に示す。又、$m=5$；$\nu=1,5$ に対する $G_m^{(\nu,0)}(0;t)$ の形状を左図に示す。

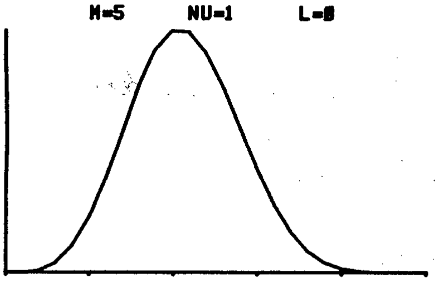
$A_j^{(\nu)}$: $m=5$

ν \ j	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{6}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
4	2	1	0	-1	-2
5	1	1	1	1	1

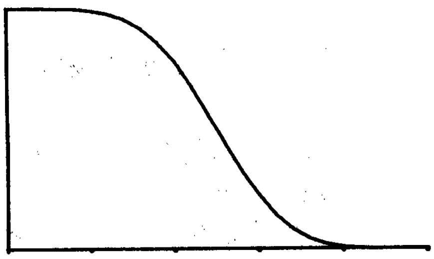
B_j : $m=5$

j	1	2	3	4	5
	$\frac{1}{720}$	$\frac{29}{360}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{331}{360}$	$\frac{719}{720}$

KERNEL FUNCTION OF ERRORS OF MARKOFF'S FORMULA
M=5 NU=1 L=8



KERNEL FUNCTION OF ERRORS OF MARKOFF'S FORMULA
M=5 NU=5 L=8



4．むすび　多くの m に対して A_j, B_j を数表化しておくと、近似式に Markoff の公式を適用したときの打切り誤差を評価することができる。