

位相的特徴量に基づく平面ポリオミノ箱詰め問題の解法

村井保之[†] 巽久行^{††} 徳増眞司[†]

VLSI フロアプランや板金板取などを含む一般的な板取ないし配置問題に関する研究の一環として、少なくとも1つの解が存在する特殊な配置問題である平面ポリオミノ箱詰め問題を取り上げた。本論では、この解法として、ピース配置に関わる位相的特徴量の潰し合いに着目した配置手順発見のための大域的な探索手法を開発した。この手法の中身は空間的な評価としての“盤面の評価”とそれに基づく手順の評価としての“攻めての評価”を活用して、最も有望な順序でピースを選択し配置するアルゴリズムからなっているが、本論ではさらに、原問題を拡張して2つの最適化問題を派生させ、これらについても前記アルゴリズムをベースとした解法を構成した。あわせて、これら手法の有効性を数値実験により検証した。

Solution of Planar Polyomino Packing Problem Based on Topological Characteristics

YASUYUKI MURAI,[†] HISAYUKI TATSUMI^{††} and SHINJI TOKUMASU[†]

In this paper, a planar polyomino packing problem is taken up as a specialized placement problem such that it has at least one solution of placement, but not so many in general. The authors have developed a new global search algorithm for solutions, based on the mechanism of generation and extinction of topological characteristics on placement of pieces. Then, two optimization layout problems are constructed and solved by extending the packing problem and its solution. Finally, it is proved by numerical experiments that these algorithms work well in good efficiency.

1. はじめに

ICやVLSIの設計における素子配置は典型的な板取問題である。これらの集積回路の開発においては、その高密度化を実現するために長方形やL字状の角形素子群をいかに小さいスペースに配置するか、という問題が扱われる^{1),2)}。この問題については、この分野の専門家などによって、種々の方法が提案されているが、配置順序対表現または領域のブロックスライスに関わるポーランド法の表現を用いて、素子群の位置関係を表現し、アニーリング手法を基に、その位置関係と各素子位置にゆらぎを与え、最適化を図る手法などが典型的である^{3),4)}。一方、これと関連する数学パズルに平面ポリオミノの箱詰め問題がある。このパズルは前記角形素子と同様な平面ポリオミノをピースとする配置問題であり、実用的な問題との関連において多くの

知見を提供する⁵⁾。この種のパズルに属するものとして、それぞれが4つの正方形で構成される、5種類のポリオミノを2組使って、 5×8 の箱を隙間なく埋める方法の総数を求めるテトラミノ・パズルとか、同じく、それぞれが5つの正方形で構成される、12種類のポリオミノを1組使って、 3×20 , 4×15 , 5×12 または 6×10 の箱を隙間なく埋める方法の総数を求める、ペントミノ・パズルがあり、マニアの間で種々の高速解法が提案されている^{6),7)}。筆者らにとって、VLSIフロアプランのための手法を開発することが、主要な目的の1つではあるが、今回本論ではその1つの段階として、任意の平面ポリオミノをピースとする、箱詰め問題の解法を取り上げる。このタイプのパズルは、一般的な配置問題に共通する特徴を備えているが、それ自身、他の配置問題にはない、固有の性質が存在する。すなわち、箱詰め問題では、少なくとも1つの正解が存在している。そして、すべての可能解は、最適解であり、したがって正解であるということができ、解の数は、その探索木の大きさに比べるとはるかに少なく、場合によっては1つしかないこともある。したがって、箱詰め問題に対する新しい解法を提案す

[†] 神奈川工科大学
Faculty of Engineering, Kanagawa Institute of Technology

^{††} 筑波技術短期大学
Tsukuba College of Technology

ることによって、他の実用的な配置問題の解法に新しいアイデアを提供することが期待できる。以下本論では、前記箱詰め問題を平面的に扱うので、単にポリオミノというときは、特に断らない限り平面ポリオミノを意味するものとする。また、本論で扱うポリオミノとして、次に示すデジタル型とアナログ型の2種類をあらかじめ考慮するものとする。すなわち、まず、“デジタル型ポリオミノ(*D*型ポリオミノ)”は、標準的なポリオミノに相当する概念であり、一辺単位長さの正方形(単体ポリオミノという)より構成される単体複体である。したがって、このような*D*型ポリオミノをピースとする箱詰め問題は前記平面ポリオミノの箱詰め問題そのものである。*D*型ポリオミノの概念は、各辺が任意寸法を有する拡張型ポリオミノに対して、これを含む同じトポロジーのポリオミノで、各辺が、あらかじめ設定された単位寸法の整数倍である*D*型ポリオミノを対応させるという規格化の発想に基づいている。すなわち、任意寸法の拡張型ポリオミノ(これを対比的に、アナログ型ポリオミノ、別名で*A*型ポリオミノと呼ぶ)による配置を考える前に、これに対応する*D*型ポリオミノによる配置を、まず考えることから出発する。本論では、*D*型ポリオミノ箱詰め問題の解法を中心に置きながら、さらにその展開としてのポリオミノ配置問題について、以下の順序で議論する。

(1) 2~4章では、平面ポリオミノ箱詰め問題(PPPP: planar polyomino packing problem)を、与えられた*D*型ポリオミノのすべてを使って、あらかじめ設定された矩形領域(これも*D*型ポリオミノに属する)を隙間なく埋め尽くす問題として考える。次に、この問題に対して、ピース配置に関わる位相的特徴量の潰し合いに着目した配置手順発見のための探索手法を提案する。

さらに、5章では、PPPPの展開として、

(2) PPPPに対して、あらかじめ固定した配置領域を設定せず、与えられた*D*型ポリオミノのすべてを互いに重ならないように配置するに要する矩形配置領域の面積最小化の問題(DPLP: D-type polyomino layout problem)を考える。本問題の解法は、PPPPアルゴリズムをベースとして構築される。また、

(3) DPLPを変形して、*A*型ポリオミノの配置に適用した問題(APLP: A-type polyomino layout problem)を考え、先のPPPPないしDPLPアルゴリズムをベースとした解法を与える。

(4) 6章では、上記の解法の数値実験による検証を行い、その結果の妥当性を議論する。そして、

(5) 7章は全体の結論である。

2. 平面ポリオミノ箱詰め問題(PPPP)のための基本戦略

本章では、与えられた*D*型ポリオミノ群で、あらかじめ与えられた長方形の領域を単体複体的に埋め尽くす平面ポリオミノ箱詰め問題(PPPP)を扱う。特に、本論で提案する解法に関する基本的な考え方について述べる。

2.1 平面ポリオミノ箱詰め問題の特徴

平面ポリオミノ箱詰め問題は、一般のジグソーパズルと同じく、与えられた平面領域上に与えられたピースを単体複体的に配置し、すべてのピースを使って、この領域を隙間なく埋め尽くす問題であり、配置の仕方に関して少なくとも1つの解があることがあらかじめ分かっている。場合によっては、多くの組合せがある中で、解はただ1つしか存在しないかもしれない。このような極端な場合、これを最適化問題として見た場合、可能解はただ1つであり、それが同時に最適解だということになる。解法としては、遺伝的アルゴリズムとか、シミュレーテッドアニーリング法など、配置されたピースのシャフリングによって解の改善を図る手法の適用が考えられるが、可能解の数が少ない本問題に対して有効とは考えにくい。一方、本問題に関して、先に述べたテトラミノ・パズルやペンタミノ・パズルが扱う代表的な解法の特徴は、

- (1) 総数を求めるために原理的に全数探索を行っていること、
- (2) 高速化のための探索木の刈り込み手法として、あらかじめ分かっているピース形状の特徴を利用していること、
- (3) ピースの配置について局所的な整合性チェックを行っていること、

の3点である。一方、筆者らの想定するパズルとその解法の特徴は、

- (1) 実用的な見地から、要求を満たすいずれかの1つの解を高速に求める必要があること、
- (2) 任意の*D*型ポリオミノのピースを用いること、
- (3) ピースの配置に関して大域的な整合性チェックを目指すこと、

である。このため、上記テトラミノ、ペンタミノ・パズルなどで提案された手法は、大変参考になるものではあるが、筆者らの目的を達成するには不十分である。

2.2 解法に関わる基本戦略

筆者らは、PPPPの解とは、“与えられたポリオミノのピースを、後述する一定のルールのもとで前記領

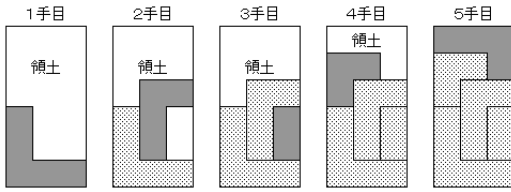


図 1 配置手順の例

Fig. 1 An example of polyomino puzzle.

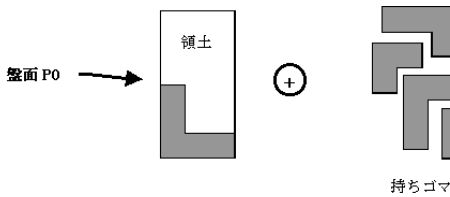


図 2 平面ポリオミノ箱詰め問題を配置問題へ変換

Fig. 2 Translation of a polyomino puzzle to a placement game.

域上に順次配置するピース選択の手順である”と解釈する。すなわち、あらかじめ解答者(これを攻め方と呼ぶ)は1セット n 個のポリオミノのピースを持ち駒として、また前記の長方形領域を配置場所(守り方領土または単に領土と呼ぶ)として与えられ、手順を次のように進める(図1参照)。まず、提示された領土に、攻め方が1つ目の駒をその左下隅に置くことから始まる(この際、置かれた駒は、領土からはみ出ないものとする)。それが攻め方の第1手である。これに対して、置かれた駒によって占有された部分を除く領域が新たな領土となる。これに対して、攻め方は、提示された領土の左下隅でかつすでに置かれた駒に単体複体的に接する位置に次の駒を配置する(この際、置かれた駒は、領土からはみ出ないものとする)。これが攻め方の第2手である。以下同様に進めて、攻め方 n 手目で、守り方領土をすべて見方の駒で埋め尽くした場合、攻め方の勝ち、守り方の負けとなり、パズルが解けたことになる。攻め方の駒と守り方の領土を総合して盤面と呼ぶことにすると、問題の盤面を P_0 として、平面ポリオミノ箱詰め問題は次のように再帰的に定義される(図2参照)。

[定義1] “盤面 P_0 は平面ポリオミノ箱詰め問題である”とは「攻め手 O (配置できる駒)が存在し、かつ攻め手 O に対して盤面が空となるか(残りの駒も領土も空)、または、結果としての領土 $D\#$ に関して、盤面 $P\#$ は平面ポリオミノ箱詰め問題である」とする。

これは、フォーマルな定義であり、これを証明することが、盤面 P_0 で規定された平面ポリオミノ箱詰め

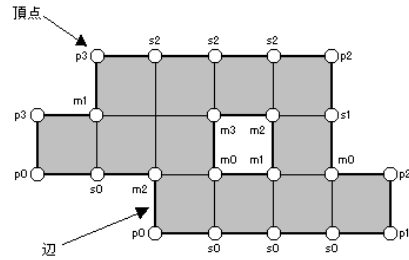


図 3 ポリオミノの頂点と辺の関係

Fig. 3 The relations between vertices of polyomino.

問題を解いたことになる。

この定義によれば、平面ポリオミノ箱詰め問題は、若干の無理はあるが、詰め将棋や、チェスにおけるチェックメイト問題に類似するところがある。つまり、定義1において、“結果としての領土 $D\#$ に関して”の部分を、“任意の守り手 $D\#$ に関して”と変更すれば、詰め将棋や、チェスにおけるチェックメイト問題の定義に対応することになる⁸⁾。ところで、たとえば、詰め将棋の場合には、盤面 P_0 が詰め将棋であることを証明することはとりも直さず、詰めの手順を示すことであり、問題の解を与えることになる。平面ポリオミノ箱詰め問題の場合にもまったく同じ言い回しができる。そこで、詰め将棋にならって平面ポリオミノ箱詰め問題を解こうとするのがここでいう PPPP の解法の基本である。その概要を述べれば以下ようになる。

すなわち、ある盤面で、次に配置できるピースの候補から解の手順に属する、ピースの選択を効率的に行うために、各候補から、何手が先まで先読みし、その盤面の状態を評価し(盤面の評価)、そこから遡って、当該候補の評価(攻め手の評価)を行い、その結果得られる優先順位に従って、ピースの配置を試行する。本論では、基本となる盤面の評価をピース配置に関わる位相的特徴量の潰し合いに関する量的な評価によって行うことを提案する。ちなみに、この評価法は、先に述べたピースの配置に関する大域的な整合性チェックを可能とする中心的なアイデアであり、筆者らが独自に発見した部分である。

3. D型ポリオミノの位相的性質

再度、誤解のないように断っておくが、D型ポリオミノとは標準的なポリオミノのことであり、A型ポリオミノと区別するために用いる。本章では、解法を論ずるための準備として、D型ポリオミノの位相的性質をあらかじめ明らかにする。まず、ポリオミノの頂点と辺の関係を図3に示すように定義する。すなわち、デジタル化されたポリオミノの頂点と辺はそれ

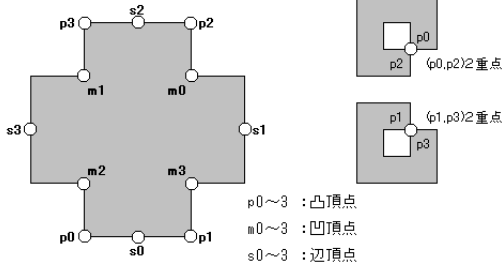


図4 頂点の種類

Fig. 4 Classification of vertices.

ぞれ、これを構成する単体ポリオミノの頂点と辺のうち、ポリオミノの境界上にある頂点と辺によって構成される。ここでは、特に頂点に注目し、位相的に12種類に分類する。すなわち、図4に示すように、 $p_0, p_1, p_2, p_3, m_0, m_1, m_2, m_3, s_0, s_1, s_2, s_3$ と標記され、 p, m 、または s の添え字付の頂点(ただし、 $i = 0 \sim 3$)は、各々、凸頂点、凹頂点または線分上の頂点であることを意味する。ここでデジタル化されたポリオミノに関する、次のような位相的特徴量を基本量として定義する。すなわち、

$$Mp_i = p_i \text{点の数}$$

$$Mm_i = m_i \text{点の数}$$

$$Ms_i = s_i \text{点の数}$$

$$vM_i = Mp_i - Mm_{(i+2)}$$

ここに $(i+2)$ は $(i+2) \bmod(4)$ を意味する。

$$eM_i = Mp_i + Ms_{(i-1)} + Ms_i - Mm_i$$

ここに $(i-1)$ は $(i-1) \bmod(4)$ を意味する。

$$Mh = \text{穴の数}$$

$$\sum Mp = \sum_i \{Mp_i\}$$

$$\sum Mm = \sum_i \{Mm_i\}$$

$$\sum Ms = \sum_i \{Ms_i\}$$

とする。なお、 vM_i は p_i 点と $m_{(i+2)}$ 点の相関にかかわる基本量であり、 eM_i は $(i-1)$ 辺と i 辺の長さの和にかかわる基本量である。ここで、上記の基本量に関して、次のような命題が成立する。

[命題1] $\sum Mp, \sum Mm, \sum Ms$ は、ポリオミノの90度単位の回転ないし反転に対して、不変である。

(証明)ほとんど明らか。たとえば反時計回り90度回転では、 p_i, m_i および s_i の各点は各々、 $p_{(i+1)}, m_{(i+1)}$ および $s_{(i+1)}$ の点となるからである。□

[命題2]

$$vM_0 = vM_1 = vM_2 = vM_3$$

$$= 1 - Mh = \left(\sum Mp - \sum Mm \right) / 4$$

$$eM_0 = eM_1 = eM_2 = eM_3$$

$$= \left(\sum Mp + 2 \sum Ms - \sum Mm \right) / 4$$

また、 $vM_i, eM_i (i = 0 \sim 3)$ は、ポリオミノの90度単位の回転ないし反転に対して、不変である。□

(証明)単体ポリオミノについては、上記の関係は明らかに成り立つ。任意のデジタル化されたポリオミノは、単体ポリオミノで帰納的に構成できる。 k 個の単体ポリオミノからなるすべてのポリオミノについて、上記の関係が成立するものとして、それらに1個の単体ポリオミノを接合して $k+1$ 個の単体ポリオミノからなるポリオミノを生成する場合の接合パターンは、図5に示すように、90度単位の回転ないし反転の組合せで表現できるパターンを同一類として、すべての類の代表パターンを1つずつ数え上げることが可能である。そして、そのいずれの場合にも、 vM_i, eM_i の増減量はすべての i について等しい。特に vM_i は、穴が1つ生ずるたびに1だけ低下する。したがって、図5にあるすべての代表パターンに関しては与式が成立しており、命題1から、 $vM_i, eM_i (i = 0 \sim 3)$ は、ポリオミノの90度単位の回転ないし反転に対して、不変である。また、図5に現れなかったパターンについては、いずれかの代表パターンから、90度単位の回転ないし反転の組合せで到達できるので、結局、すべての場合について命題は成立する。□

次に、2個以上のポリオミノの単体複体の接合においては、各々の頂点どうしが互いに重なりあって消滅し、新しい合成ポリオミノの頂点を生成する、いくつかのパターンが存在する。これを分類すると、図6に示すようになる。各々に名前を付けると、 $u_0, u_1, u_2, u_3; v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; y_0, y_1, y_2, y_3; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ の27パターンである。各々のパターンが1つ発生するたびに、どの種別の頂点が消滅し、どの種別の頂点が新しく生成されるかを整理したものが、表1である。

4. 平面ポリオミノ箱詰め問題のための手順発見探索アルゴリズム

本章では少ない解空間の中で、どれか1つの解を効率的に求めることを考える。そのため、基本的には縦型探索を用いる。まず、最も有望な順序でピース(攻め手)を選択し、配置していくために、空間的な評価としての“盤面の評価”と、手順の評価としての“攻

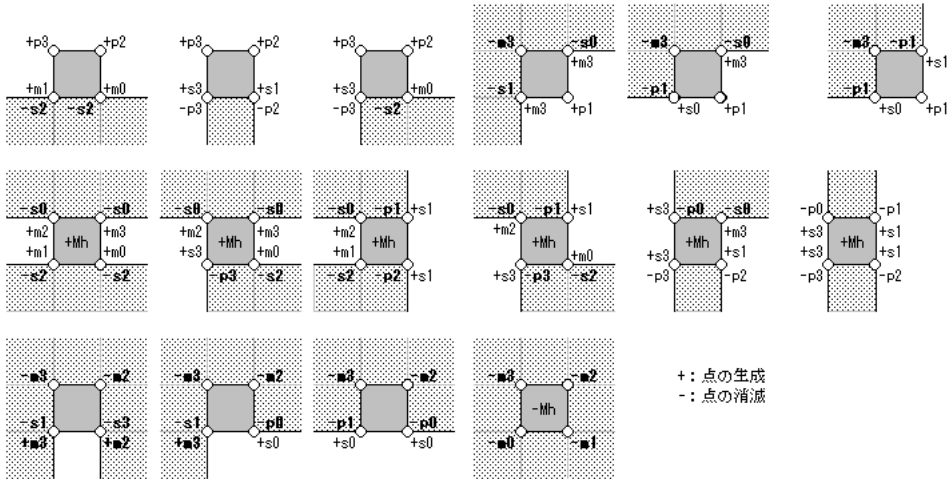


図5 単体ポリオミノによる単体複体的拡大
 Fig. 5 Expansion of the simplex-complex by simplex polyominoes.

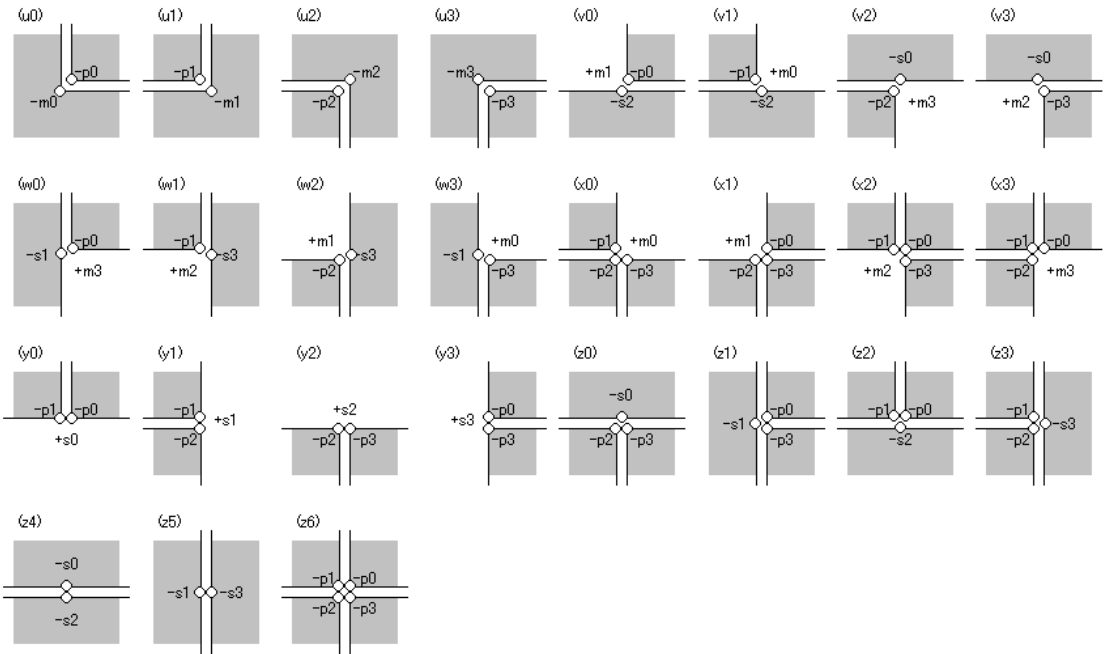


図6 頂点生成・消滅パターンと頂点との関係
 Fig. 6 The relations between the patterns and the classes of vertex.

め手の評価”を活用して、手順発見の探索アルゴリズムを構成する。

4.1 平面ポリオミノ箱詰め問題における盤面の評価
 平面ポリオミノ箱詰め問題の場合、与えられた局面での盤面の評価とは、それまでの手順が正解であることの可能性、すなわち、守り方が提示している領土を、手持ちの駒をすべて使って、単体複体的に埋め尽くすための可能性を、その盤面の状態だけから直接評価す

ることと同義である。この際、領土も駒もすべて、デジタル化されたポリオミノであることに注意する。この可能性を必要十分条件の形でいい表すと、“領土と合同な持ち駒の単体複体多角形を構成できる”ということになる。これを少し緩めて、必要条件の形で述べると、次のようになる。

- (1) 領土の面積は駒の面積の総和に等しい。
- (2) デジタル化されたポリオミノの頂点や辺にかかわ

表1 ポリオミノ接合時の頂点の消滅と生成
Table 1 Extinction and generation of vertices during polyomino packing.

	u_0	u_1	u_2	u_3	v_0	v_1	v_2	v_3	w_0	w_1	w_2	w_3	x_0	x_1	x_2	x_3	y_0	y_1	y_2	y_3	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	
p_0	-				-				-				-	-	-	-					-	-	-				-	
p_1		-				-				-			-	-	-	-						-	-	-				-
p_2			-				-				-		-	-	-	-					-			-				-
p_3				-				-				-	-	-	-						-	-	-					-
s_0							-	-									+				-					-		-
s_1									-			-						+				-						-
s_2					-	-													+				-		-			-
s_3										-	-										+				-			-
m_0	-					+						+	+												-			-
m_1		-			+						+			+														
m_2			-					+		+					+													
m_3				-			+		+							+												

る位相的特徴量に関して、領土のそれと一致する持ち駒の単体複体多角形を構成できる。

このうち、(1)に関しては、原問題に解が存在するという前提があるので、2章で述べたように、“領土左下隅に領土からはみ出ないように、かつ、すでに置かれた駒がある場合、単体複体的に接するように攻め方の駒を配置する”という配置ルールが守られている限り、つねに成立している。そこで、盤面の評価を(2)を基準にして考えてみる。そのための具体的な手順を構成するために、ある盤面での、ポリオミノに関する頂点の位相的特徴量を、イニシャル M の代わりに、イニシャル N または K で表すことにし、前者は手持ちの駒全体にわたる各特徴量の総和を、後者を領土の特徴量に対応させるものとする。すなわち、次の各式で表す(ただし、 $i = 0 \sim 3$)。

$$Np_i = \sum_j \{Mp_i/j\}$$

ここに、 Mp_i/j は駒 j の Mp_i

$$Nm_i = \sum_j \{Mm_i/j\}$$

ここに、 Mm_i/j は駒 j の Mm_i

$$Ns_i = \sum_j \{Ms_i/j\}$$

ここに、 Ms_i/j は駒 j の Ms_i

$$vN_i = \sum_j \{vM_i/j\}$$

ここに、 vM_i/j は駒 j の vM_i

$$eN_i = \sum_j \{eM_i/j\}$$

ここに、 eM_i/j は駒 j の eM_i

$$\sum Np = \sum_j \left\{ \sum Mp/j \right\}$$

ここに、 $\sum Mp/j$ は駒 j の $\sum Mp$

$$\sum Nm = \sum_j \left\{ \sum Mm/j \right\}$$

ここに、 $\sum Mm/j$ は駒 j の $\sum Mm$

$$\sum Ns = \sum_j \left\{ \sum Ms/j \right\}$$

ここに、 $\sum Ms/j$ は駒 j の $\sum Ms$

$$Kp_i = \text{領土の } Mp_i$$

$$Km_i = \text{領土の } Mm_i$$

$$Ks_i = \text{領土の } Ms_i$$

$$vK_i = \text{領土の } vM_i$$

$$eK_i = \text{領土の } eM_i$$

$$\sum Kp = \text{領土の } \sum Mp$$

$$\sum Km = \text{領土の } \sum Mm$$

$$\sum Ks = \text{領土の } \sum Ms$$

この盤面が平面ポリオミノ箱詰め問題であるならば、手持ちの駒をある順序で単体複体的に接合していけば、その結果としての合成ポリオミノ(多面体)は領土と合同となる。このことは、接合パターンに関わる頂点の種別増減が、前記、手持ちの駒全体にわたる各特徴量の総和と対応する領土の特徴量の差、たとえば、 $Np_i - Kp_i$ などに一致することを意味する。すなわち(ただし、 $i = 0 \sim 3$)、

$$\Delta p_i = Np_i - Kp_i$$

$$\Delta m_i = Nm_i - Km_i$$

$$\Delta s_i = Ns_i - Ks_i$$

$$v\Delta_i = vN_i - vK_i$$

$$e\Delta_i = eN_i - eK_i$$

$$\Delta p = \sum Np - \sum Kp = \sum_i \Delta p_i$$

$$\Delta m = \sum Nm - \sum Km = \sum_i \Delta m_i$$

$-\Delta p_0 = -u_0$	$-v_0$	$-w_0$	$-x_1 -x_2 -x_3 -y_0$	$-y_3$	$-z_1 -z_2$	$-z_6$	(1-p0)
$-\Delta p_1 = -u_1$	$-v_1$	$-w_1$	$-x_0 -x_2 -x_3 -y_0 -y_1$		$-z_2 -z_3$	$-z_6$	(1-p1)
$-\Delta p_2 = -u_2$	$-v_2$	$-w_2$	$-x_0 -x_1 -x_3 -y_1 -y_2$	$-z_0$	$-z_3$	$-z_6$	(1-p2)
$-\Delta p_3 = -u_3$	$-v_3$	$-w_3 -x_0 -x_1 -x_2$	$-y_2 -y_3 -z_0 -z_1$			$-z_6$	(1-p3)
$-\Delta s_0 =$	$-v_2 -v_3$		$+y_0$	$-z_0$	$-z_4$		(1-s0)
$-\Delta s_1 =$		$-w_0$	$-w_3$	$+y_1$	$-z_1$	$-z_5$	(1-s1)
$-\Delta s_2 =$	$-v_0 -v_1$			$+y_2$	$-z_2 -z_4$		(1-s2)
$-\Delta s_3 =$		$-w_1 -w_2$		$+y_3$	$-z_3 -z_5$		(1-s3)
$-\Delta m_0 = -u_0$	$+v_1$		$+w_3 +x_0$				(1-m0)
$-\Delta m_1 = -u_1$	$+v_0$		$+w_2$	$+x_1$			(1-m1)
$-\Delta m_2 = -u_2$		$+v_3$	$+w_1$	$+x_2$			(1-m2)
$-\Delta m_3 = -u_3$	$+v_2$	$+w_0$		$+x_3$			(1-m3)

図7 式(1)：解の存在条件
Fig. 7 Equations for feasible solution.

$$\Delta s = \sum Ns - \sum Ks = \sum_i \Delta s_i$$

として、図6の27パターン： $u_0, u_1, u_2, u_3; v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; y_0, y_1, y_2, y_3; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ の各々を、正解となる接合過程で現れるパターンの数を表す変数と考え、表1より、図7に示す12個の1次式が成立する。

ここに、各変数： $u_0, u_1, u_2, u_3; v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; y_0, y_1, y_2, y_3; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ に対して、非負整数条件が付帯する。したがって、与えられた盤面が平面ポリオミノ箱詰め問題であるための必要条件は、図7に示す式(1)の可能解集合が空でないこと、少なくとも1つの解が存在することである。3章の命題2より、図7の式(1)は9つの独立した式に単純化できる(付録1参照)。さらに、付録1より9つの独立した式(付録1内の式(A.16)~(A.24))から、式(2)に示す3つの不等式が、可能解の存在条件として導かれる。これが第1段盤面評価である。つまり、式(2)の条件が満たされないとき、その盤面は不成立である。

[第1段盤面評価]

$$\begin{aligned} e &\geq 0 \\ d = e - m &\geq 0 \\ c = 2e - (s + m) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、命題2より

$$e\Delta = e\Delta_0 = e\Delta_1 = e\Delta_2 = e\Delta_3 \text{ とし,}$$

式(2)内の e, s および m は、

$$\begin{aligned} e &= e\Delta, \\ s &= \max(0, \Delta s), \\ m &= \max(0, -\Delta m) \end{aligned} \tag{3}$$

または

$$e = e\Delta,$$

$$s = \sum_i \{\max(0, \Delta s_i)\},$$

$$m = \sum_i \{\max(0, -\Delta m_i)\} \tag{4}$$

である(付録1参照)。

第1段盤面評価の主要なパラメータである e, s, m について、式(3)を用いた場合、90度単位の回転や反転に対して不変であることから、回転配置や反転配置で有効である。これに対して、式(4)は、評価効率は式(3)を用いた場合より高いが、90度単位の回転や反転に対して不変ではないので、固定配置用である。

第1段盤面評価をクリアした、不可でない盤面の第2段評価はエントロピーを求めることである。エントロピーを計算するために、図7の式(1)の解の数を近似的に Wt として、以下の式で求める(付録2参照)。

$$\begin{aligned} Wt &\sim C'es \cdot (e+m)^7 \cdot (e-m)^5 \\ &= C'es \cdot (d+2m)^7 \cdot (d)^5, (e \geq s \text{ のとき}) \\ Wt &\sim C'se \cdot (2e - (s+m) + 2m)^7 \\ &\quad \cdot (2e - (s+m))^4 \cdot (s-m) \\ &= C'se \cdot (c+2m)^7 \cdot (c)^4 \cdot (s-m), \\ &\quad (e < s \text{ のとき}) \end{aligned} \tag{5}$$

ここに、 $C'es$ および $C'se$ は定係数である。

Wt を基に、盤面の複雑度を表す「盤面のエントロピー」を次のように定義する。

[第2段盤面評価]

エントロピーは、

$$\log(Wt/C'es) = 7 \cdot \log(d+2m) + 5 \cdot \log(d) \tag{e \geq s \text{ のとき}}$$

$$\log(Wt/C'se) = 7 \cdot \log(c+2m) + 4 \cdot \log(c) + \log(s-m) \tag{e < s \text{ のとき}}$$

(6)

実際には、 $c = d = e = m = s = 0$ の場合、0となるように、エントロピーは、

$$7 \cdot \log(d+2m+1) + 5 \cdot \log(d+1) \quad (e \geq s \text{ のとき})$$

$$7 \cdot \log(c+2m+1) + 4 \cdot \log(c+1) + \log(s-m+1) \quad (e < s \text{ のとき})$$

(7)

の式を用いる。第1段評価で不成立(不可)となった盤面に対しては、その時点でただちに、 $Entropy = -1$ をセットして評価を終わるものとする。成立となった盤面に対しては、 $Entropy$ が盤面の評価点となる。盤面の次の攻め手に優先順位をつける戦略として、この評価点を活用するスタンスが考えられる。

4.2 平面ポリオミノ箱詰め問題における攻め手の評価

詰め将棋における数手先読みに関わるミニマックス評価と若干類似する、攻め手数先読みの盤面評価をベースとして、元に遡って、 $Entropy(\geq 0)$ を累積していく攻め手評価手順について述べる。当面の盤面に対して、次の攻め手を第1手目として、考えられるすべての攻め手を列挙し J 手目まで先読みするものとして、それぞれに評価点を与えるものとする。以下に、攻め手評価のアルゴリズムを Pseudo program の形で示す。

```
int 攻め手の評価(盤面)
{
  for(すべての持ち駒) {
    ENTROPY = 攻め手のエントロピー (1, 持ち駒);
    if(ENTROPY  $\geq$  0) {
      その攻め手のデータを攻め手候補セル列に登録;
      // 候補セルのデータ形式は(手番, 盤面, 評価点)
    }
  }
  return(ENTROPY);
  //ENTROPY 0:候補あり, -1: 配置不可
}
float 攻め手のエントロピー (j, 駒)
{
  if(駒は攻め手として配置できない)return(-1);
  if(j==J or 残り持ち駒== 空) {
    // J は先読みの最大深さ
    Entropy = 盤面エントロピー (駒配置後の盤面);
    return(Entropy);
  }
  sum=-1;
  for(残りすべての持ち駒){
```

```
    ENTROPY=攻め手エントロピー (j+1, 持ち駒)
    if(ENTROPY $\geq$ 0) sum=max(0, sum)
    +ENTROPY;
  }
  return(sum); //sum 0:ENTROPY 値, -1: 配置不可
}
float 盤面エントロピー (盤面)
{
  if(e $\geq$ 0 and d=e-m $\geq$ 0 and c=2e-(s+m) $\geq$ 0)
    // 盤面は不可ではない!
    if(e $\geq$ s)Entropy=7log(d+2m+1)+5log(d+1);
    else Entropy=7log(c+2m+1)+4log(c+1)
    +log(s-m+1);
  else Entropy=-1; // 盤面は不可!
  return(Entropy);
}
```

5. 平面ポリオミノ箱詰め問題 (PPPP) の拡張

本章では、平面ポリオミノ箱詰め問題を発展させて、より現実的な問題設定を行い、これらに対して先に得た PPPP アルゴリズムをベースとした解法を提案する。

5.1 D 型ポリオミノの最適配置問題 (DPLP) とその解法

まず、フォーマルな DPLP の定義を述べる [D 型ポリオミノの最適配置問題 (DPLP)]: 一組の D 型ポリオミノと方形領土が与えられる。方形領土は、一边 (X 辺) が固定で他方の辺 (Y 辺) を可変とする。領土内に、与えられた D 型ポリオミノを、単体複体的にかつ、 Y 辺、したがって、方形領土の面積が最小になるように配置せよ。□

この問題は、与えられた固定的な領土を、決められた D 型ポリオミノすべてを使って埋め尽くす PPPP とは明らかに異なっているが、DPLP アルゴリズムは次の命題のもとで、PPPP アルゴリズムから自然に誘導できる。

[命題 3] D 型ポリオミノの最適配置問題の解が存在し、そのときの領土の 2 辺の長さを、各々 X, Y とする。また、 $\delta N =$ 領土の面積 $X \cdot Y - \sum j (D \text{ 型ポリオミノ } j \text{ の面積})$ とすると、新たに、 δN 個の単体ポリオミノを加えた、ポリオミノの組と、上記領土からなる盤面は、平面ポリオミノ箱詰め問題である。□

(証明) D 型ポリオミノの最適配置問題に解が存在し、それが平面ポリオミノ箱詰め問題だとすると、 $\delta N = 0$ である。平面ポリオミノ箱詰め問題でないとすると、領土内に与えられた D 型ポリオミノ群で埋め尽くされなかった、余白部分が存在する。これらは、やはり D 型ポリオミノの集まりであるので、さらに分解して前記 δN 個の単体ポリオミノの集まりと見なすことができる。したがって、これらをあらかじめ与えられた D 型ポリオミノに組み入れて考えれば、元の盤面は平面ポリオミノ箱詰め問題となる。□

結局、DPLP アルゴリズムは以下ようになる。

[DPLP アルゴリズム]

- (1) 次式を満たす最小の整数を $Y_{min} (> 0)$ とする。
 $\delta N = \text{領土の面積 } X \cdot Y_{min} - \sum_j (D \text{ 型ポリオミノ } j \text{ の面積}) \geq 0$
- (2) $Y_{max} \leftarrow Y_{min} + y, \delta N \leftarrow \delta N + y \cdot X$ ここに $y \sim 2 \text{ or } 3$.
- (3) $Y \leftarrow Y_{max}$
- (4) D 型ポリオミノ集合 $\leftarrow D$ 型ポリオミノ集合 $\cup \{\delta N \text{ 個の単体ポリオミノ}\}$
- (5) 領土 ($X \cdot Y$) と D 型ポリオミノ集合で規定される PPPP を解く。
- (6) 解が存在する場合 ($Y = Y_{max}$ では解の存在を仮定) $Y \leftarrow Y - 1, \delta N \leftarrow \delta N - X$ として (4)へ。存在しない場合、 $Y + 1$ が最少の Y 辺長さとなり、結局 DPLP の解となる。

□

5.2 A 型ポリオミノの最適配置問題 (APLP) とその解法

実際の角形素子を A 型ポリオミノとして扱い、各々に D 型ポリオミノが 1 つずつ対応されたものとする。このとき、次のような A 型ポリオミノの最適配置問題を考える。

「 A 型ポリオミノの最適配置問題：方形領土の面積 $X \cdot Y$ の最小化を実現し、かつ互いが重ならないような A 型ポリオミノの配置を求めよ (なお、配置方向としては、あらかじめ、固定的、90 度単位回転、反転のいずれかの自由度が与えられるものとする)。」

この問題の解法として、 A 型ポリオミノに対応する D 型ポリオミノに関わる次のような 2 段階の手順が可能である。ただし、これは、ヒューリスティックな解法であり、得られた結果は、必ずしも最適ではない。

「 A 型ポリオミノ配置問題の解法」

- (1) A 型ポリオミノに対応する D 型ポリオミノの組と、あらかじめ仮定した領土からなる盤面に対して、平面ポリオミノ箱詰め問題 (PPPP) ないし D 型ポ

表 2 数値実験の結果 (PPPP)

Table 2 Results of numerical experiments for PPPP.

データ名	駒数	領土	配置	優先度	先読み	時間 (秒)
Puzzle-B	13	10 × 5	固定	E 小	1	10.0
					3	3.0
				E 大	1	30.0
			3	10.0		
			回転	E 小	1	1.5
					3	1.0
E 大	1	5.0				
3	5.0					
Puzzle-C	25	10 × 10	固定	E 小	3	1440 (24 分)
					E 小	1
			回転	E 大	3	5.0
					3	20.0
			固定	E 小	3	9010 (2.5 時間)
					3	17.0

リオミノの最適配置問題 (DPLP) を解く。

- (2) (1) で配置された D 型ポリオミノの位置関係を、基本的に保ちつつ、対応して配置された A 型ポリオミノを、隣り合う A 型ポリオミノ間の余白を埋めるように、 X, Y 軸方向の原点側に移動させる。この操作を、移動できるポリオミノがなくなるまで続ける。

□

6. 数値実験による検証

PPPP を基本とする前記配置問題解法のアルゴリズムを、コンピュータプログラムとして、Macintosh G3 (500 MHz, 実装メモリ 512 MB) 上に Symantec C++ を用いて実装し、これらの性能を評価した。なお、DPLP のアルゴリズムは、本質的に PPPP そのものであると見なしてよいので、紙面の関係上その評価に関する議論を割愛した。

6.1 PPPP アルゴリズムに関する数値実験

アルゴリズムをプログラム実装し、その妥当性と効率に関して、次の観点から検証した。

- (1) 駒の総数、すなわち問題の複雑さと計算時間の関係。
- (2) 盤面および攻め手評価における、エントロピーの優先度と計算効率の関係。
- (3) 攻め手評価のための先読みの深さと計算効率の関係。

これまでに得られた結果を以下に示す (図 8, 表 2 参照)。ここで、実験データの種別として、次のような表記法を用いる。

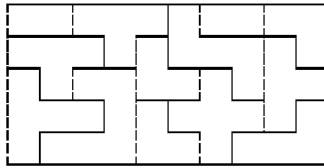
(データ名, 駒数, 領土 (X, Y), 配置方向自由度, 優先度戦略, 先読み手数) ここに、

配置方向自由度 = { 固定, 回転 }

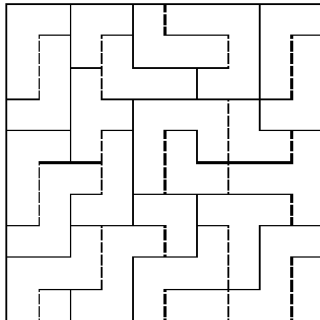
固定: 配置の際、駒の回転を許さない

回転: 配置の際、駒の 90 度単位での回転を許す

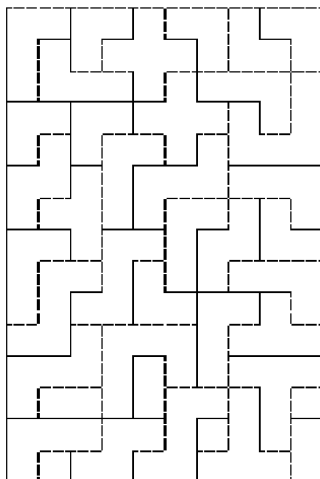
優先度戦略 = { E 大, E 小 }



Puzzle-B (13ピース)



Puzzle-C (25ピース)



Puzzle-D (40ピース)

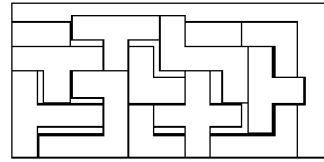
図8 PPPP アルゴリズムに関する結果

Fig. 8 Results of numerical experiments for PPPP.

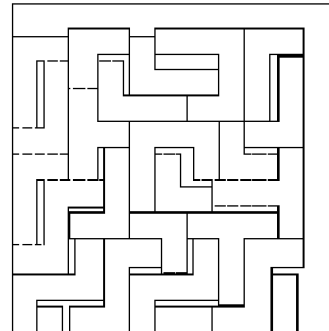
- E* 大 : (順位 1) 手番は大きい方を優先
 (順位 2) エントロピーは大きい方を優先
E 小 : (順位 1) 手番は大きい方を優先
 (順位 2) エントロピーは小さい方を優先

である。

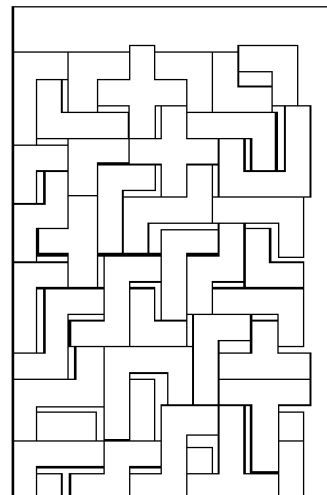
実験の結果から、先読みの効果は大であること、優先度戦略としては *E* 小 (エントロピーは小さい方を優先) の方が、*E* 大 (エントロピーは大きい方を優先) より有利であることが分かる。これは、エントロピーが大きい攻め手は、正解を含む可能性が大きいが、



前処理 : 3sec 後処理 : 0.5sec



前処理 : 4sec 後処理 : 1sec



前処理 : 17sec 後処理 : 1.5sec

図9 APLP アルゴリズムに関する結果

Fig. 9 Results of numerical experiments for APLP.

その系列に解が存在しなかった場合に探索時間に大きな無駄が生じているものと考えられる。また、エントロピーが小さい攻め手は、最終の詰め手の手順になっているか、そうでなかったとしても、以降の選択肢が少なく、正解か否かの判定が早いので、いずれか1つの正解を速く求めるための探索効率が高いと考えられる。なお、配置に関して、回転の自由度を与えると可能解が増加し、解が求まりやすくなっていることが分かる。いい換えると、エントロピーを低減させながら解に至る手順において、エントロピーはあくまでも解の存在の可能性を与える量であり、必ずしも解の存在

を保証するものではない。しかしながら，回転を許す場合には，その手順の中に，正解が含まれる割合が大きくなり，むだな試行を軽減できることにつながる。

6.2 APLP アルゴリズムに関する数値実験

図 9 は，平面ポリオミノ箱詰め問題 B, C および D に対応する APLP を設定して解いた結果である。図で，前処理，後処理とあるのは，それぞれ APLP アルゴリズムの第 1 段階および第 2 段階の処理を意味する。今回は，前処理としては，PPPP アルゴリズムそのものを用いた。結果から，計算時間のほとんどは PPPP (ないし，DPLP) アルゴリズムで費やされること，また，配置結果は必ずしも最適であることを保証するものではないにもかかわらず，自然で無駄のないものになっていることが分かる。

7. むすび

VLSI フロアプランや板金板取などを含む一般的な板取ないし配置問題に関する研究の一環として，少なくとも 1 つの解が存在する特殊な配置問題である平面ポリオミノ箱詰め問題を取り上げ，ポリオミノの配置によってもたらされる位相的特徴量の潰し合いに着目した大域的な盤面評価と，ゲームの探索木による配置手順発見のための攻め手評価を融合した解法を開発した。本論ではさらに，原問題を拡張して 2 つの最適化問題を派生させ，これらについても前記アルゴリズムをベースとした解法を構成し，あわせて，これら手法の有効性を数値実験により検証した。

(1) 結論

平面ポリオミノ箱詰め問題において，複数のポリオミノを単体複体的に互いに接合してゆく過程を，個々のポリオミノが有する頂点や辺に関する位相的特徴量の消滅と，接合によって生ずる新たなポリオミノにおける前記位相的特徴量の生成の関係と見ることが出来る。この関係を盤面の評価に用いれば，ある途中の盤面状態を，それが正解の経路に乗っているかどうかを，大域的にかつ定量的に評価できる。この尺度として，今回，エントロピーという概念を導入した。そして，この尺度をもとに，手順の探索木の先読みを行い，エントロピーを低減させるような手順を選んでゆけば，正解を高速に求められることを理論と実験によって示すことができた。

(2) 今後の課題

本論の結果をより確実にし，さらに高度な展開を図るための課題として，

(a) 規模の大きいケースを対象とした，より包括的な数値実験を行うことにより手法の改良を行う，

(b) 立体ポリオミノ箱詰め問題への拡張を図る，
(c) 実用的な IC や VLSI の素子配置問題への展開を図る，
などがある。

参考文献

- 1) Heller, W.R., Sorkin, G. and Maling, K.: The Planar Package for System Designers, *Proc. 19th D.A. Conf.*, pp.253–260 (1982).
- 2) Otten, R.H.J.M.: Automatic Floorplan Design, *Proc. 19th D.A. Conf.*, pp.261–267 (1982).
- 3) Wong, D.F. and Liu, C.L.: A New Algorithm for Floorplan Design, *D.A. Conf.*, pp.101–107 (1986).
- 4) Fujiyoshi, K. and Murata, H.: Arbitrary Convex and Concave Rectilinear Block Packing Using Sequence-Pair, *Trans. IEEE Computer-Aided Design*, Vol.19, No.2, pp.224–233 (2000).
- 5) Golomb, S.W.: *Polyominoes*, Princeton University Press (1994).
- 6) 小野芳彦: 実戦 C プログラミング: パズルとゲームのアルゴリズム, 工学社 (1986).
- 7) 奥村晴彦: コンピュータアルゴリズム事典, 技術評論社 (1987).
- 8) 越智利夫, 亀井達弥, 内ヶ崎儀一郎, 徳増眞司: 計算機が解く詰め将棋, 数学セミナー, Vol.46, No.6, pp.44–48 (1969).

付 録

A.1 式 (1) の簡単化と式 (2) の導出

図 7 の式 (1) に対して

$$\begin{aligned} & -式(1-p0) - 式(1-s0) - 式(1-s3) + 式(1-m0), \\ & -式(1-p1) - 式(1-s1) - 式(1-s0) + 式(1-m1), \\ & -式(1-p2) - 式(1-s2) - 式(1-s1) + 式(1-m2), \\ & -式(1-p3) - 式(1-s3) - 式(1-s2) + 式(1-m3), \\ & -式(1-s0) - 式(1-s1) - 式(1-s2) - 式(1-s3), \\ & +式(1-m0) + 式(1-m1) + 式(1-m2) + 式(1-m3) \end{aligned} \quad (A.1)$$

などの変形を施すと

$$\begin{aligned} e\Delta_0 = & +v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \\ & +x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + z_0 + z_1 + z_2 + z_3 \\ & +z_4 + z_5 + z_6 \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} e\Delta_1 = & +v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \\ & +x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + z_0 + z_1 + z_2 + z_3 \\ & +z_4 + z_5 + z_6 \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} e\Delta_2 = & +v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \\ & +x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + z_0 + z_1 + z_2 + z_3 \\ & +z_4 + z_5 + z_6 \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$e\Delta_3 = +v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$+x_0+x_1+x_2+x_3+z_0+z_1+z_2+z_3$$

$$+z_4+z_5+z_6 \tag{A.5}$$

$$\Delta s = +v_0+v_1+v_2+v_3+w_0+w_1+w_2+w_3$$

$$-y_0-y_1-y_2-y_3+z_0+z_1+z_2+z_3$$

$$+2 \cdot (z_4+z_5) \tag{A.6}$$

$$-\Delta m = -u_0-u_1-u_2-u_3+v_0+v_1+v_2+v_3$$

$$+w_0+w_1+w_2+w_3+x_0+x_1+x_2+x_3 \tag{A.7}$$

という結果が得られる。はじめの4つの式から、 $e\Delta_0 = e\Delta_1 = e\Delta_2 = e\Delta_3 (= e\Delta$ と置く) という条件が導かれるが、これはすでに命題2で明らかな、位相的特徴量の関係である。結局、これらの4つの式のうち、独立な式は1個のみである。ここで

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$VW = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$X = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$Y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

$$Z03 = z_0 + z_1 + z_2 + z_3$$

$$Z45 = z_4 + z_5$$

$$Z66 = z_6 \tag{A.8}$$

という変数の置き換えを行うと、式(A.2)~(A.7)は

$$e\Delta = +VW + X + Z03 + Z45 + Z66 \tag{A.9}$$

$$\Delta s = +VW - Y + Z03 + 2 \cdot Z45 \tag{A.10}$$

$$-\Delta m = -U + VW + X \tag{A.11}$$

となる。明らかにこれら3つの式は独立である。式(A.9~A.11)を変形すると、

$$Z66 = e - (+VW + X + Z03 + Z45) \tag{A.12}$$

$$Y = (+VW + Z03 + 2 \cdot Z45) - s \tag{A.13}$$

$$U = (+VW + X) - m \tag{A.14}$$

ここに、

$$e = e\Delta, s = \max(0, \Delta s), m = \max(0, -\Delta m) \tag{A.15}$$

とおいた。なお、式(A.12)~(A.14)に対応する、原式は次に示す9つの独立な式からなる。

$$z_6 = e\Delta - (v_0+v_1+v_2+v_3+w_0+w_1+w_2+w_3$$

$$+x_0+x_1+x_2+x_3+z_0+z_1+z_2+z_3$$

$$+z_4+z_5) \tag{A.16}$$

$$y_0 = -\Delta s_0 + v_2 + v_3 + z_0 + z_4 \tag{A.17}$$

$$y_1 = -\Delta s_1 + w_0 + w_3 + z_1 + z_5 \tag{A.18}$$

$$y_2 = -\Delta s_2 + v_0 + v_1 + z_2 + z_4 \tag{A.19}$$

$$y_3 = -\Delta s_3 + w_1 + w_2 + z_3 + z_5 \tag{A.20}$$

$$u_0 = \Delta m_0 + v_1 + w_3 + x_0 \tag{A.21}$$

$$u_1 = \Delta m_1 + v_0 + w_2 + x_1 \tag{A.22}$$

$$u_2 = \Delta m_2 + v_3 + w_1 + x_2 \tag{A.23}$$

$$u_3 = \Delta m_3 + v_2 + w_0 + x_3 \tag{A.24}$$

式(A.16)~(A.24)について次の事実注目する。

[命題 3]

式(A.16)~(A.24)は、図7の式(1)と等価であり、式(A.16)~(A.24)が可能(解が存在する)ならば、式(A.12)~(A.14)は可能である。しかし、逆は必ずしも成立しない。□

変数 $U, VW, X, Y, Z03, Z45, Z66$ はすべて非負であるから、上記の関係から次の不等式が得られる。

$$0 \leq (+VW + X + Z03 + Z45) \leq e \tag{A.25}$$

$$s \leq (+VW + Z03 + 2 \cdot Z45) \tag{A.26}$$

$$m \leq (+VW + X) \tag{A.27}$$

式(A.25)~(A.27)を導く際に、図7の式1に遡って式(A.26)および(A.27)を構成しなおすと、より評価性能の高い定式化が可能である。すなわち、式(A.15)の代わりに

$$e = e\Delta, s = \sum_i \{ \max(0, \Delta s_i) \},$$

$$m = \sum_i \{ \max(0, -\Delta m_i) \} \tag{A.28}$$

とすることができる。

次に、式(A.25)~式(A.27)、2・式(A.25)~式(A.26)~式(A.27)などにより、さらに

$$0 \leq +Z03 + Z45 \leq e - m (= d \text{ とする}) \tag{A.29}$$

$$0 \leq +X + Z03 \leq 2e - (s + m) (= c \text{ とする}) \tag{A.30}$$

であることが分かる。式(A.25)、(A.29)、(A.30)より、可能解の存在条件として次の関係が得られる。これが第1段盤面評価である。つまり、下記の条件が満たされないときその盤面は不成立である。

$$e \geq 0 \tag{A.31}$$

$$d = e - m \geq 0 \tag{A.32}$$

$$c = 2e - (s + m) \geq 0 \tag{A.33}$$

この関係が満足されれば、盤面は、必ずしも不成立ではない。式(A.25)~(A.27)、したがって、式(A.12)~(A.14)を満たす解が存在するからである。すなわち、

$$(VW, X, Z03, Z45) = (e, 0, 0, 0), e \geq s \text{ のとき}$$

$$(VW, X, Z03, Z45) = (2e - s, 0, 0, s - e),$$

$$e < s \text{ のとき} \tag{A.34}$$

は、確かに式(A.25)~(A.27)の可能解である。Z45に着目すると、簡単な計算によって

$$Z45 \in [0, e - m], \quad e \geq s \text{ のとき}$$

$$Z45 \in [s - e, e - m], \quad e < s \text{ のとき} \tag{A.35}$$

の範囲で、また範囲でのみ、式(A.25)~(A.27)が可能であることが分かる(図A.1参照)。

A.2 式(5)の導出

次に、図7の式(1)に従って、式(A.16)~(A.24)

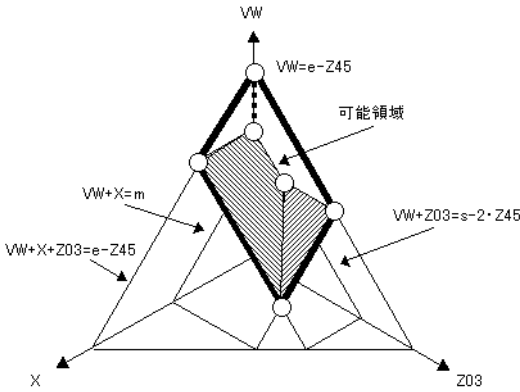


図 A.1 Z45 をパラメータとした (VW, X, Z03) 可能領域 (Ω_{Z45})

Fig. A.1 (VW, X, Z03) possibility region (Ω_{Z45}) as the parameter of Z45.

の可能解の個数の概算を行う。なお、総数の概算を計算する場合、変数の非負整数条件のうち、整数条件を取り除き、可能領域を規定する多面体の体積（または、面積）をもって概算値とするものとする。まず、その準備として、計算の基本となる関係式を示す。

[命題 4]

次に示す、 n 次元領域 ω_n ，またはその境界 δn ：

$$\omega_n = \{X : x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \alpha, X \text{ は非負整数}\} \tag{A.36}$$

$$\delta\omega_n = \{X : x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha, X \text{ は非負整数}\} \tag{A.37}$$

ただし、 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ， $\alpha \geq 0$ の解 X の、個数の概算値を $\omega(n, \alpha)$ ，または $\delta\omega(n, \alpha)$ と記すと、

$$\omega(n, \alpha) = \text{体積} \mid \omega_n \mid = \cdot \alpha^n / n! \tag{A.38}$$

$$\delta\omega(n, \alpha) = \text{面積} \mid \delta\omega_n \mid = \sqrt{n} \cdot \alpha^{n-1} / (n-1)! \tag{A.39}$$

である。ただし、 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ という解が 1 組存在するので、式 (A.38) ~ (A.39) で $\alpha = 0$ の場合のみ、作為的であるが、値を 1 とする。 □

(証明)

(1) 数学的帰納法により

$$\begin{aligned} \omega(n, \alpha) &= \int_0^\alpha \omega(n-1, \alpha-x_1) dx_1 \\ &= \int_0^\alpha \frac{(\alpha-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{\alpha^n}{n!} \end{aligned} \tag{A.40}$$

(2) 別の見方をすると、 $\omega(n, \alpha)$ は $\delta\omega_n$ を底面とし、原点を頂点とする錐体の体積である。 $\delta\omega_n$ と原点との距離は $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ だから

$$\omega(n, \alpha) = \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} \delta\omega(n, \alpha) \left(\frac{t}{\alpha/\sqrt{n}}\right)^{n-1} \cdot dt$$

$$= \frac{\alpha}{n\sqrt{n}} \cdot \delta\omega(n, \alpha) \tag{A.41}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \delta\omega(n, \alpha) &= \frac{n\sqrt{n}}{\alpha} \cdot \omega(n, \alpha) = \frac{n\sqrt{n}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \\ &= \sqrt{n} \alpha^{n-1} / (n-1)! \end{aligned} \tag{A.42}$$

□

ただし、以降で用いるのは、 $\delta\omega(n, \alpha)$ だけである。 $\omega(n, \alpha)$ は $\delta\omega(n, \alpha)$ を導出する前提となった式である。

式 (A.12) ~ (A.14) における変数 $U, Y, Z66$ に対応する $(u_0, u_1, u_2, u_3; y_0, y_1, y_2, y_3; z_6)$ は、式 (A.16) ~ (A.24) から、 $(v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ が決まれば、一義的に定まる。そこで、これらは考慮から除外して、残りの変数に対する解の組を、式 (A.25) ~ (A.27) をベースとして見積もるものとする。すなわち、 $(VW, X, Z03, Z45)$ が式 (A.25) ~ (A.27) の解の 1 つであるとき、これに対する解：

$$\Xi = (v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \tag{A.43}$$

の組の概算値： $w(VW, X, Z03, Z45)$ は、式 (A.8) により、

$$\begin{aligned} w(VW, X, Z03, Z45) &= \delta\omega(8, VW) \cdot \delta\omega(4, X) \\ &\quad \cdot \delta\omega(4, Z03) \cdot \delta\omega(2, Z45) \end{aligned} \tag{A.44}$$

として見積もられる。式 (A.44) の算定では、命題 3 で指摘したような、式 (A.12) ~ (A.14) では可能であるが、式 (A.16) ~ (A.24) において不可となる Ξ の組も、あえて含めた概算を行っている。

式 (A.25) ~ (A.27) の可能領域を Ω とし、さらに、 $Z45$ を固定したときの Ω の切片を Ω_{z45} 、この切片上の、解 $(VW, X, Z03)$ の組を $w_{z45}(VW, X, Z03)$ とする。式で表すと (図 A.1 参照)，

$$0 \leq (+VW + X + Z03) \leq e - Z45 \tag{A.45}$$

$$s - 2 \cdot Z45 \leq (+VW + Z03) \tag{A.46}$$

$$m \leq (+VW + X) \tag{A.47}$$

また、図 7 の式 (1) における解の総数の概算値を Wt とし、切片 Ω_{z45} 上の解

$$\Xi_{z45} = (v_0, v_1, v_2, v_3; w_0, w_1, w_2, w_3; x_0, x_1, x_2, x_3; z_0, z_1, z_2, z_3) \Big|_{z45}$$

における総数の概算値を Wt_{z45} とすると、

$$\begin{aligned} Wt &= \int_{\Omega} w(VW, X, Z03, Z45) d\Omega \\ &= \int_{[p,q]} Wt_{z45} \cdot \delta\omega(2, Z45) \cdot dZ45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sim \int_{[p,q]} [Wt_{z45} \cdot \delta\omega(2, Z45)]_{z45=(p+q)/2} \cdot dZ45 \\ & \sim [Wt_{z45} \cdot \delta\omega(2, Z45)]_{z45=(p+q)/2} \cdot (q-p) \end{aligned} \quad (\text{A-48})$$

ここに、式 (A-35) により、

$$\begin{aligned} [p, q] &= [0, e-m], & (e \geq s \text{ のとき}) \\ & [s-e, e-m], & (e < s \text{ のとき}) \end{aligned}$$

である。式 (A-48) は、 $Z45$ の変域の中間値を代表点として近似したものである。

$$\begin{aligned} Wt_{z45} &= \int_{\Omega_{Z45}} W_{Z45}(VW, X, Z03) \cdot d\Omega_{Z45} \\ &\sim W_{Z45}(e-Z45, 0, 0) \cdot |\Omega_{Z45}| \\ &\sim \delta\omega(8, e-Z45) \cdot |\Omega_{Z45}| \end{aligned} \quad (\text{A-49})$$

と近似する。すなわち、図 A-1 より、 Ω_{Z45} は VW 軸の頂点 $(VW, X, Z03) = (e-Z45, 0, 0)$ を頂点とする錐体であるので、切片 Ω_{Z45} の解の概算値 Wt_{z45} を、切片における解 $(VW, X, Z03)$ の概数 $|\Omega_{Z45}|$ と、前記頂点を代表点としたときの解 $W_{Z45}(e-Z45, 0, 0)$ の積として表すものである。また、 $|\Omega_{Z45}|$ を次のように近似するものとする。

$$\begin{aligned} |\Omega_{Z45}| &= Ces \cdot (q-Z45)^3, & (e \geq s \text{ のとき}) \\ &= Cse \cdot \{(q-Z45) \cdot (Z45-p)\}^{3/2}, \\ & & (e < s \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (\text{A-50})$$

ここに、 Ces および Cse は定係数である。これは、 Ω_{Z45} が大略、錐体形であること、 $e \geq s$ のときは $Z45 = q = e-m$ で、また $e < s$ のときには、 $Z45 = q = e-m$ と $Z45 = p = s-e$ で体積が 0 になることを考慮した。この結果、式 (A-48) ~ (A-50) より、 Wt は次のように近似される。

$$\begin{aligned} Wt &\sim [Wt_{z45} \cdot \delta\omega(2, Z45)]_{z45=(p+q)/2} \cdot (q-p) \\ &\sim [W_{Z45}(e-Z45, 0, 0) \cdot |\Omega_{Z45}| \cdot \delta\omega(2, Z45)]_{z45=(p+q)/2} \cdot (q-p) \\ &\sim [\delta\omega(8, e-Z45) \cdot |\Omega_{Z45}| \cdot \delta\omega(2, Z45)]_{z45=(p+q)/2} \cdot (q-p) \end{aligned} \quad (\text{A-51})$$

p, q の値を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} Wt &\sim C'es \cdot (e+m)^7 \cdot (e-m)^5 \\ &= C'es \cdot (d+2m)^7 \cdot (d)^5 \quad (e \geq s \text{ のとき}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Wt &\sim C'se \cdot (2e-(s+m)+2m)^7 \cdot (2e-(s+m))^4 \\ &\quad \cdot (s-m) \\ &= C'se \cdot (c+2m)^7 \cdot (c)^4 \\ &\quad \cdot (s-m) \quad (e < s \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (\text{A-52})$$

となる。ここに、 $C'es$ および $C'se$ は定係数である。

(平成 14 年 4 月 4 日受付)

(平成 14 年 9 月 5 日採録)



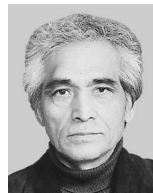
村井 保之 (学生会員)

1960 年生。1999 年神奈川工科大学大学院工学研究科情報工学専攻博士前期課程修了。2002 年同大学院工学研究科情報工学専攻博士後期課程満期退学。空間の認識に関する研究開発に従事。電子情報通信学会会員。



巽 久行 (正会員)

1956 年生。1985 年明治大学大学院工学研究科博士後期課程修了。工学博士。1986 年神奈川工科大学情報工学科助手。2002 年筑波技術短期大学助教授。多値論理、ニューラルネットに興味を持つ。電子情報通信学会、日本フアイ学会、米国 IEEE 各会員。



徳増 眞司 (正会員)

1940 年生。1963 年横浜国立大学工学部卒業 (株) 日立製作所日立研究所入社。1973 ~ 1974 年米国スタンフォード大学大学院 OR 学科修士課程修了。1984 年工学博士 (京都大学)。1995 年神奈川工科大学情報工学科教授。生産情報システム (CAD/CAM/CAE, CG 等)、システム工学、OR、計算幾何学の研究に従事。米国 IEEE、OR 学会、電子情報通信学会各会員。