6X-6

中間的な複雑さをもつ問題のクラスについて

戸田誠之助　　堀浩一　　安永尚志
（国文学研究資料館　情報処理室）

1．まえがき

計算量理論の中心的課題は与えられた問題をその複雑さによって分類する事である．この目的を達成するため様々な問題のクラスが導入されそのクラスに関して完全となる問題が数多く示されている．一方、導入されたクラスが大まかであるため分類されずに残っている問題も多い．例えば、グラフ同型問題や無向グラフの到達可能性判定問題（ＵＧＡＰ）などである．この状況をＵＧＡＰについて述べると次のようになる．ＵＧＡＰはＮＬ（非決定性対数領域）に属するがＮＬ完全であるかＤＬ（決定性対数領域）に属するかは判っていない．一般には、そのどちらでもない、いわば、中間的複雑さをもつと予想されている．そこで、本稿では、このような中間的複雑さをもつ問題を分類するためのクラスを特にＤＬとＮＬの間に導入しそのクラスが中間的であるという根拠を与える．更に、そのクラスに関して完全となる具体的な問題を示す．

2．　諸定義

本稿では計算量理論における基本的概念は既知として議論を進める．以下、語や言語について適当なアルファベットを仮定する．語ｘの長さを｜ｘ｜と表す．$\mathbb{N}$を自然数の集合とする．また　　　　をＴＭと略す．

DSPACE(S)（NSPACE(S)）をＳ領域限定の決定性（非決定性）ＴＭで受理される言語のクラスとする．特に、ＤＬ＝$\bigcup_{c>0}$DSPACE$(c\cdot\log_2 n)$、ＮＬ＝NSPACE$(c\cdot\log_2 n)$　とする．オラクルＴＭ（ＯＴＭと略す）の定義は〔２〕を参照されたい．本稿のＯＴＭは次の制限をもつ．すなわち、オラクルテープに文字を書き始めた時点からｑｕｅｒｙ状態に入るまで決定的に動作する．ＤＬ（Ａ）（ＮＬ（Ａ））を言語Ａをオラクルとしてもつ対数領域限定の決定性（非決定性）ＯＴＭによって受理される言語のクラスとする．また、言語のクラス$\mathbb{C}$に対し、ＤＬ（$\mathbb{C}$）＝$\bigcup_{A\in\mathbb{C}}$ＤＬ（Ａ）とする（ＮＬ（$\mathbb{C}$）についても同様）．対数領域階層｛$O\Sigma_k^{\log}$｝，$k=0,1,\cdots$を次のように定める：$O\Sigma_0^{\log}$＝ＮＬ，各ｋ＞０について、$O\Sigma_k^{\log}$＝ＮＬ（$O\Sigma_{k-1}^{\log}$）．更に、ＯＬＨ＝$\bigcup_{k\geq 0} O\Sigma_k^{\log}$とする．

Ａ，Ｂを任意の言語とする．ＡがＢに還元可能であるとは、対数領域で計算可能な関数ｆが存在して任意の語ｘに対して$x\in A \Leftrightarrow f(x)\in B$となるときをいう．Ａが言語のクラス$\mathbb{C}$に関して完全であるとは、$A\in\mathbb{C}$かつ$\mathbb{C}$の任意の言語がＡに還元可能であるときをいう．

ｇ，Ｇを$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$なる関数とする．ｔを部分関数ｆを計算する決定性ＴＭとする．このとき、$KS_t[g,G]$＝｛ｘ｜語ｙが存在して$|y|\leqslant g(|x|)$かつ$f(y)=x$かつ入力ｙに関してｔは作業テープセルを高々$G(|x|)$個しか使用しない｝と定める．言語のクラス$\mathbb{C}$に対して$\mathbb{C}[g,G]$＝｛Ｌ｜($\exists L'\in\mathbb{C}$，

On a Class of Problems with Intermediate Complexity

Seinosuke TODA, Koichi HORI, Hisashi YASUNAGA
National Institute of Japanese Literature

$\exists t, \exists c>0)[L = L' \cap KSt[c \cdot g, c \cdot G + c]]\}$ と定める．

３．中間的な複雑さをもつ問題のクラス

本節では、ＤＬとＮＬの中間に位置すると考えられるクラスを導入し、その中間性の根拠を与える．ここで、導入するクラスは $NL[\log, \log]$ である．このクラスはＮＬの中で非常に効率良くかつ極度に短い語に圧縮できる言語のクラスであると言える．このクラスがＤＬとＮＬの中間に位置するという根拠は次の予想にもとずいている．

（予想Ａ）（１）$DSPACE(n) \neq NSPACE(n)$.

（２）$O\Sigma_{k}^{\log} \neq O\Sigma_{k+1}^{\log}$ for each $k \geq 0$.

（１）はＬＢＡ問題として知られている有名な未解決問題であり、（２）は対数領域階層の無限階層性の問題である．どちらについても後者が前者を包含する事は定義より明らかであるがその包含関係がｐｒｏｐｅｒであるか否かは判っていない．一般に、ｐｒｏｐｅｒであると予想されている．以下、本稿の主要結果を示す．

言語のクラス $\mathbb{C}$ が中間的な複雑さをもつとは、$\mathbb{C} \not\subseteq$ ＤＬかつ $\mathbb{C}$ がＮＬ完全な言語を持たないときをいう．

＜定理１＞　次の２命題は同値である．

（１）$DSPACE(n) = NSPACE(n)$.　（２）$NL[\log, \log] \subseteq DL$

＜定理２＞　次の２命題は同値である．

（１）$O\Sigma_{2}^{\log} = OLH$．　（２）$NL[\log, \log]$ はＮＬ完全な言語をもつ．

＜系＞　予想Ａのもとで $NL[\log, \log]$ は中間的な複雑さをもつ．

４．具体的な問題

本節では $NL[\log, \log]$ 完全となる具体的な問題を示す．前節の系より本節の問題はＤＬとＮＬの間の中間的な複雑さをもつと予想される．

＜定義＞　自然数ｎについして $[n] = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ とする．上のｋ次元有向グラフＧは対（Ｖ，Ｅ）である．ここで、$V = [n]^k$ であり、$E \subseteq V \times V$ である．Ｖの元を頂点とよび、Ｅの元を辺とよぶ．$v = \langle i_1, \cdots, i_k \rangle$ Ｖとする．$p = \langle j_1, \cdots, j_k \rangle \in [3]^k$ がｖのパターンであるとは、各 $1 \leq l \leq k$ について $j_l \equiv i_l \pmod 3$ となるときをいう．Ｖ（ｐ）をパターンｐをもつＶの元全体とする．$D(v) = \{\langle j_1 - i_1, \cdots, j_k - i_k \rangle \mid (v, \langle j_1, \cdots, j_k \rangle) \in E\}$ とする．Ｇがパターン制約を満たすとは、任意のパターンｐと任意のｕ，ｖ $\in$ Ｖ（ｐ）に対してＤ（ｕ）＝Ｄ（ｖ）となるときをいう．

以下で定義される問題をｋ－ＧＡＰＰＣとよぶ．

Ｉｎｓｔａｎｃｅ：　ｋ次元グラフＧ、Ｇの頂点ｓ，ｔ

Ｑｕｅｓｔｉｏｎ：　次の２条件が成り立つか？

（１）Ｇはパターン制約を満たす．（２）ｓからｔへのＧ上の道が存在する．

＜定理３＞　Ｋ≧１が存在して任意のｋ≧Ｋに対してｋ－ＧＡＰＰＣは $NL[\log, \log]$ 完全である．

参考文献

〔1〕J. Hartmanis：Generalized Kolmogorov Complexity and the Structure of Feasible Computations, FOCS, pp. 439−445（1983）.

〔2〕W. L. Ruzzo, J. Simon and M. Tompa：Space−Bounded Hierarchies and Probabilistic Computations, JCSS, pp. 216−230（1984）.