計算幾何学と折れ線近似問題

5X-6

今井 浩
(九州大学工学部情報工学科)

伊理 正夫
(東京大学工学部計数工学科)

1. 計算幾何学とは

計算幾何学 (Computational Geometry) は、幾何学的な構造を有する大量の情報を計算機で高速に処理するための算法を開発、研究する分野であり、ここ10年ほどの間に、VLSI 設計、コンピュータ・グラフィックス、地理情報処理などの様々な分野における幾何的問題に対して、効率的な算法を産み出してきた(計算幾何学の諸成果については、[6, 9] などを参照)。最近、計算幾何学の算法の中でも特に効率のよい凸包構成算法を応用することにより、折れ線近似の諸問題が効率よく解けることが Imai, Iri [3, 4, 5] により示されている。本稿では、[5]で示されている折れ線近似問題に対する統一的な枠組みを述べ、これまでに得られている算法についてその手間などをまとめて報告する。

2. 折れ線近似問題とその分類

地理情報処理、グラフィックス、数値計算などにおいて、複雑な図形やグラフを表すのに折れ線がよく用いられる。そのような折れ線データを扱う際の基本的な問題として、与えられた折れ線をより節点数の少ない他の折れ線で近似する問題がある。この折れ線近似問題に関しては、その実用上の必要性から、これまでにも多くの研究が成されているが (例えば [7] 参照)、ある基準の下で最適な近似折れ線を求めることができてかつ計算の効率の点でも優れている算法は、極く最近まで与えられていなかったようである (Imai, Iri [3])。

折れ線近似問題は、次の三つの観点から分類することができる:

(1) 区分的線形関数 (折れ線関数) を関数として近似するのか、それとも一般の折れ線を図形として近似するのか、

(2) どのような誤差基準を用いるか、

(3) 最適化の基準: (i)指定された許容誤差の下で近似折れ線の節点数を最小にする (節点数最小問題) のか、(ii)近似折れ線の節点数が指定されたときに誤差を最小にする (誤差最小問題) のか。

3. 折れ線関数近似問題

関数 $f:[x^-,x^+]\to\mathbf{R}$ が連続な区分的線形関数 (折れ線関数) であるとは、xy平面における $y=f(x)$ のグラフが、x座標が $x^-=x(p_1)<x(p_2)<\ldots<x(p_n)=x^+$ なる点$p_1,p_2,\ldots,p_n$をこの順に直線分で結ぶ折れ線であることをいう。折れ線関数fに対して、他の折れ線関数 $\tilde{f}$が誤差 $\varepsilon\,(>0)$ 以下の近似折れ線関数であるとは、$y=\tilde{f}(x)$ のグラフの両端点の x座標が $x(p_1)$, $x(p_n)$ であり、かつ $x(p_1)\leqq x\leqq x(p_n)$ なる任意の x に対して $|\tilde{f}(x)-f(x)|\leqq\varepsilon$ が成り立つことをいう。

折れ線関数に関する節点数最小問題を解くには、関数の折れ線 $p_1p_2\ldots p_n$ を εずつ上下に平行移動することにより得られる多角形 $P(\varepsilon)$ において、p_1 を通る辺 e_1 から p_n を通る辺 e_n への節点数最小の単調な折れ線を、辺可視問題を繰り返し解きながら求めればよい (図1)。これは、$P(\varepsilon)$ の上下境界の (上境界より上側の集合、下境界より下側の集合の) 凸包対を考えることにより $O(n)$ の手間で解ける[4]。誤差最小問題がかなり難しいこともわかっている[2]。

4. 折れ線近似問題

4.1. 定式化. 様々の型の問題を統一的に扱うため、一般の折れ線近似問題を次のように定義する。点 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ をこの順に結ぶ折れ線に対して、$p_1,p_2,\ldots,p_n$ の部分点列 $p_{i(1)},p_{i(2)},\ldots,p_{i(m)}$ $(1=i(1)<i(2)<\ldots<i(m)=n)$ を結ぶ折れ線を一般に近似折れ線と考え、その誤差を線分 $\overline{p_{i(l)}p_{i(l+1)}}$ $(i=1,\ldots,m-1)$ の"誤差"の最大値と定める。線分の"誤差"の定義によって、様々な近似折れ線が得られる。ここでは、次の4種の誤差基準を考える(図2参照)。

(e1) 線分 $\overline{p_ip_j}$ $(i<j)$ の誤差を線分 $\overline{p_ip_j}$ と点 p_k $(i\leqq k\leqq j)$の距離の最大と定める。

(e2) 線分 $\overline{p_ip_j}$ の誤差を直線 p_ip_j と点 p_k $(i\leqq k\leqq j)$ の距離の最大と定める (Toussaint [10])。

(e3) 線分 $\overline{p_ip_j}$ の誤差を、点$p_i,p_{i+1},\ldots,p_j$を全て含み、かつその辺が線分 $\overline{p_ip_j}$ に垂直・平行で、垂直な2辺がそれぞれ点 p_i,p_j を通るような長方形の最小幅 (の1/2) と定める。ここで、長方形の幅は $\overline{p_ip_j}$ に平行な2辺の距離と定め、点 $p_i,\ldots,p_j$ を覆うこのような長方形がない場合は誤差を $+\infty$と定める([1]; 長方形に関して、線分 $\overline{p_ip_j}$ に垂直な2辺は必ずしも p_i,p_j を通らなくてもよいとする場合もある)。

(e4) 線分 $\overline{p_ip_j}$ の誤差を、点 $p_i,p_{i+1},\ldots,p_j$ を含む長方形の最小幅 (の1/2) と定める。ここで、長方形の幅は対の辺の距離の小さい方とする[3]。

誤差基準 (e1) ((e2)も) は部分点列近似問題に関連し、他方、誤差基準(e3),(e4)は点列の長方形による被覆に関連したものである(図3)。また、(e4)は元の折れ線の部分点列とは限らない近似折れ線を求める問題でも用いられる[3]。

4.2. 解法. 近似問題を解くために、点$p_1,p_2,\ldots,p_n$を結ぶ折れ線 C に対して2つのグラフを導入する。折れ線 C の各点 p_i に対応して点 v_i をもち、$1\leqq i<j\leqq n$なる全ての対 (i,j) に対して有向枝 (v_i,v_j)

Computational Geometry and Polygonal Approximations of a Curve
Hiroshi IMAI* and Masao IRI†
*Kyushu University, †University of Tokyo

をもつグラフで、各枝(v_i, v_j)に線分$\overline{p_ip_j}$の誤差が重みとして与えられているグラフを$G(C)$で表す。与えられた誤差εに対して、重みがε以下の枝だけから成る$G(C)$の部分グラフを$G(C,\varepsilon)$で表す。定義により、$G(C)$, $G(C,\varepsilon)$は無閉路有向グラフであり、$G(C,\varepsilon)$でのv_1からv_nへのパスは誤差高々εの近似折れ線に対応する。従って、グラフを構成してしまえば、あとは簡単なグラフの問題として解ける。すなわち、

(i) グラフ$G(C)$を$f(n)$の手間で構成できる場合、節点数最小問題は$O(f(n)+n^2)$の手間で、誤差最小問題は$O(f(n)+n^2\log n)$の手間で解ける。

(ii) グラフ$G(C,\varepsilon)$を$g(n)$の手間で構成できる場合、節点数最小問題は$O(g(n)+n^2)$の手間で解ける。

グラフ$G(C)$, $G(C,\varepsilon)$を求めるのは、凸包算法などにより効率よく行える。Toussaint [10]は、オン·ラインの凸包アルゴリズム([9]など)を用いることにより、誤差基準(e2)の下でのグラフ$G(C)$を$O(n^2\log n)$の手間で求めることができること((e3)の場合も同様)を、O'Rourke, Melkman [8]は、誤差基準(e1)の下でのグラフ$G(C,\varepsilon)$が$O(n^2\log n)$の手間で構成できることを示した。Imai, Iri [5]は、(e1)の下での最小誤差ε^*が

$$\varepsilon^* \in E(C)=\{点p_i, p_jの距離\,|\,1\leqq i<j\leqq n\}\cup\{誤差基準(e2)の下での線分\overline{p_ip_j}の誤差\,|\,1\leqq i<j\leqq n\}$$

を満すことを利用し、[8]の算法を繰り返し用いることにより(e1)での誤差最小問題が$O(n^2(\log n)^2)$の手間で解けることを示した。

誤差基準(e4)の下では、$G(C,\varepsilon)$は次のような良い性質をもつ:"$G(C,\varepsilon)$において、もし枝(v_i,v_j)があるなら、$i\leqq k<l\leqq j$なる全ての対(k,l)に対して枝(v_k,v_l)が存在する"。これより、$G(C,\varepsilon)$でのv_1からv_nへの最短パス$v_1=v_{i(1)}, v_{i(2)},\ldots, v_{i(t)}=v_n$は、

(*) $\quad i(s+1):=\max\{j\,|\,G(C,\varepsilon)の枝(v_{i(s)},v_j)\}$

を$s=1,\ldots,t-1$に対して行う簡単な貪欲算法で求めることができる。(*)を行うには、$G(C,\varepsilon)$全てを求める必要はない。[3]では、2つの凸多角形の合併の凸包を求める線形時間算法とキャリパー法([9]参照)を用いることにより、(*)が$O(d_s\log d_s)$ $(d_s=i(s+1)-i(s))$で実行でき、従って、節点数最小問題が$O(n\log n)$の手間で解けることが示されている。また、上述の良い性質を十分使うことにより、節点数m以下での誤差最小問題が$O(mn\log n\cdot\log(m/n))$の手間で解けることも示されている。

最後に、折れ線近似問題に関して得られている結果を表1にまとめる。

表1. 折れ線近似算法のまとめ(n: 元の折れ線の節点数, m: 誤差最小問題での指定された節点数)

近似問題		節点数最小	誤差最小
折れ線関数		$O(n)$	—*
一般の折れ線			
誤差基準	(e1)	$O(n^2\log n)^{\dagger}$	$O(n^2(\log n)^2)$
	(e2)	$O(n^2\log n)^{\ddagger}$	$O(n^2\log n)$
	(e3)	$O(n^2\log n)$	$O(n^2\log n)$
	(e4)	$O(n\log n)$	$O(mn\log n\log(m/n))$

*難しい[2], †[8], ‡[10]

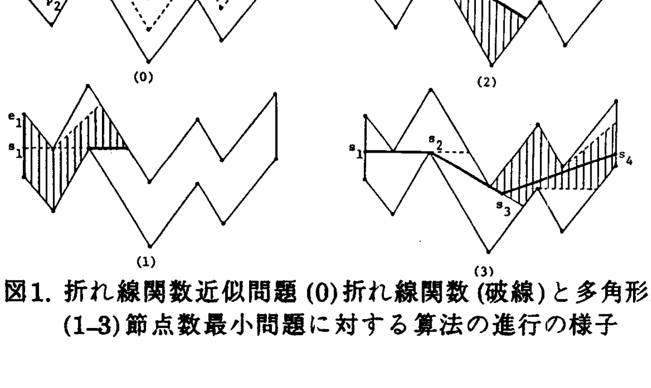

図1. 折れ線関数近似問題 (0)折れ線関数(破線)と多角形$P(\varepsilon)$ (1–3)節点数最小問題に対する算法の進行の様子

参考文献

[1] D. H. Ballard: Strip Trees: A Hierarchical Representation for Curves. *Communications of the ACM*, Vol.24, No.5 (1981), pp.310–321.

[2] 今井浩: 計算幾何学における算法の研究. 東京大学大学院工学系研究科情報工学専門課程博士論文, 1986.

[3] H. Imai and M. Iri: Computational-Geometric Methods for Polygonal Approximations of a Curve. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, to appear.

[4] H. Imai and M. Iri: An Optimal Algorithm for Approximating a Piecewise Linear Function. *Technical Report CSCE-86-C03*, Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, 1986.

[5] H. Imai and M. Iri: Polygonal Approximations of a Curve — Formulations and Solution Algorithms. *Technical Report CSCE-86-C07*, Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, 1986.

[6] 伊理正夫監修, 腰塚武志編: 計算幾何学と地理情報処理. bit別冊, 共立出版, 東京, 1986.

[7] Y. Kurozumi and W. A. Davis: Polygonal Approximation by the Minimax Method. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol.19 (1982), pp.248–264.

[8] J. O'Rourke, private communication, 1985.

[9] F. P. Preparata and M. I. Shamos: *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[10] G. T. Toussaint: On the Complexity of Approximating Polygonal Curves in the Plane. *Proceedings IASTED, International Symposium on Robotics and Automation*, Lugano, Switzerland, 1985.

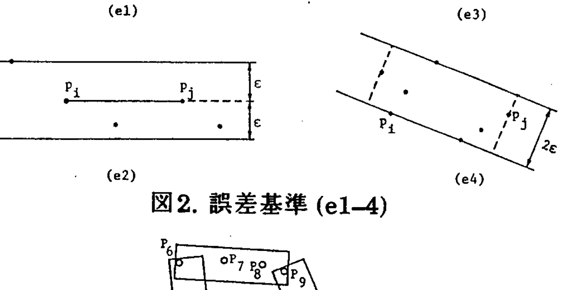

図2. 誤差基準 (e1–4)

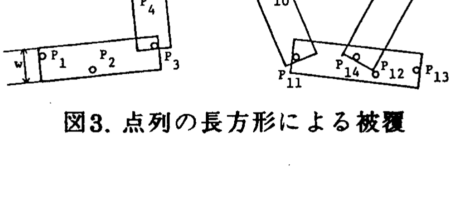

図3. 点列の長方形による被覆