

# 交差3平面を用いた Ray-Pixelカメラの線形キャリブレーション

西村 真衣<sup>1</sup> 延原 章平<sup>1</sup> 松山 隆司<sup>1</sup> 志水 信哉<sup>2</sup> 藤井 憲作<sup>2</sup>

**概要：**本稿では、Ray-Pixelカメラの新たなキャリブレーション手法として、3平面の交線を用いた方法を提案する。Ray-Pixelカメラとは画素と3次元空間の光線が直接対応付けられたカメラモデルであり、光軸対称など光線の分布に応じてクラス分けされる。従来より分布クラスが既知であれば、それに対応する制約を導入することで線形キャリブレーション手法が適用できることが知られているが、正確な分布クラスを事前に知るためには何らかのキャリブレーションが必要となる。これに対して本研究では較正平面の交線を利用することで、光線の分布クラスが未知であっても適用可能なRay-Pixelカメラの線形キャリブレーション手法を提案する。具体例として未知の屈折を伴うRay-Pixelカメラのキャリブレーションを行い、その精度評価を行う。

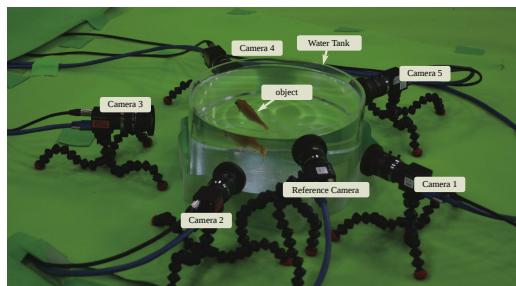


図1 水中オブジェクトを対象とした多視点撮影システム

## 1. はじめに

画像を用いた水中物体の3次元形状及び運動計測には、受精卵の発達過程の理解や、魚の運動解析など生命情報学や産業分野での様々な応用が考えられるが、水中環境における屈折や減衰といった複雑な光学現象を伴う撮影過程のモデル化手法は確立されていない。本研究では、このような水中環境にも適用可能なコンピュータビジョン技術の確立を目指して、特に屈折を伴う撮影環境においても適用可能な多視点カメラキャリブレーションに取り組む。

従来のカメラキャリブレーションでは透視投影カメラモデル、正射影カメラモデルが広く用いられてきたが、現実の投影プロセスには環境による未知の反射・屈折やレンズ特性に依存する歪みが含まれるため、これらのカメラモデルは現実のカメラを表現するのに十分ではない。レンズ歪みが画像平面上でモデル化可能な場合[1][2]や、屈折環境

に特定の制約をおく場合には、個々の環境に応じたモデル化を行うことによってこの問題に対応してきた。しかしこの方法ではレンズ特性や環境に応じたモデル化が必要となり、未知の屈折・反射プロセスを含む系には適用できない。そこで、広範な環境を扱うことが可能なカメラモデルとして本研究ではRay-Pixelカメラモデル[3]を用いる。

Ray-Pixelカメラでは、対象から画素への投影を記述せず画像平面上の各画素と対象空間での光線を直接対応づけるため、複雑な屈折・反射を含む系に適用可能である。このようなRay-Pixelカメラのキャリブレーション手法としては、同一光線上の点群が満たす拘束を利用するキャリブレーション手法が提案されているが、光線の分布情報を予め取得あるいは予測する必要がある[4]。

以上を踏まえて本稿では、Ray-Pixelカメラの光線の分布に依存しない汎用キャリブレーション手法として3平面の交線を用いる方法を提案し、具体例として任意形状の水槽内における光線空間の復元と精度評価を行う。

## 2. 関連研究

対象から画素への投影を明示的にモデル化することなく複雑な反射・屈折環境にも適用可能なカメラモデルとして、GrossbergとNayerはRay-Pixelカメラモデルを提案し、そのキャリブレーション手法として既知の2平面を用いた方法を示した[3]。水中環境でのキャリブレーションにおいてこの既知2平面を用いる方法は応用されてきた[5][6][7][8]が、較正平面の一部を水上に露出させるなどして別途対象空間での平面姿勢を獲得する必要があるため、使用環境を

<sup>1</sup> 京都大学大学院情報学研究科

<sup>2</sup> NTT メディアインテリジェンス研究所

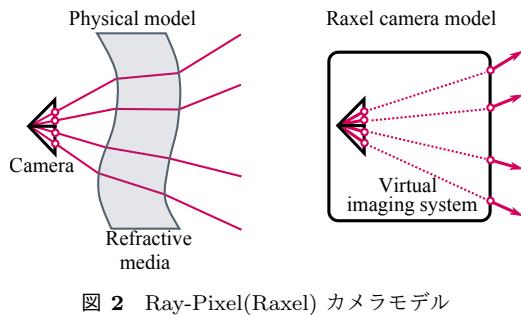


図 2 Ray-Pixel(Raxel) カメラモデル

限定してしまう。これに対し, Ramalingam らは姿勢が未知の 3 平面と Collinearity Constraint を用いた手法を提案し, 光線の分布に応じたクラスに応じた線形キャリブレーション法を示した [4][9][10][11]。

また, Ray-Pixel カメラを用いたステレオキャリブレーション法としては, Plücker 座標で表現した光線と Generalized Epipolar Constraint(GEC) を用いる方法が提案され [12][13], Li らは分布クラスに依存する縮退を解析した上で, 安定な線形解法を示した [14]。これらは従来のステレオキャリブレーションを同一点に対応する光線へ拡張した考え方であり, 基本行列に相当する行列の分解から 2 つのカメラの相対姿勢を推定するものである。

しかしながら, これらいずれの方法も光線分布クラスに応じた定式化が必要であるため, クラスを予め取得あるいは予測することになり, クラスが未知の光学系を扱う場合には適さない。これに対して本研究では 3 平面の交差構造のみを用いることにより, 光線の分布クラスに依存せず汎用的な線形キャリブレーション手法を提案する。さらに, 同一点対応の光線を用いる point-to-ray ではなく, 重複視野をもつ Ray-Pixel カメラ同士の ray-to-ray マッチングによって外部キャリブレーションを行うことで, 光線分布に依存しない Ray-Pixel カメラの多視点キャリブレーションを行う。

### 3. カメラモデル

任意の画素について, ある 3 次元座標系における光線が直接対応付けられているカメラモデルを Ray-Pixel(Raxel) カメラモデル [3] とよぶ。図 2 に示すように, Ray-Pixel カメラモデルでは, 屈折層を含む未知の光学系全体を仮想的なカメラシステムと捉え, 対象空間  $\mathcal{X}$  では光が直進すると仮定することによって広範な光学系に適用可能である。以下では,  $\mathbf{Q}^c$  をカメラ  $c$  の各画素に対応付けられた光線群とし,  $[\mathcal{W}]^c$  をカメラ  $c$  のローカル座標系とする。

#### 3.1 Ray-Pixel カメラキャリブレーション

本研究では, Ray-Pixel カメラのキャリブレーション(図 3)を以下のように定義する。

**内部キャリブレーション** 各画素に対応する光線を獲得し, 各 Ray-Pixel カメラ毎の座標系  $[\mathcal{W}]^c$  で記述する。こ

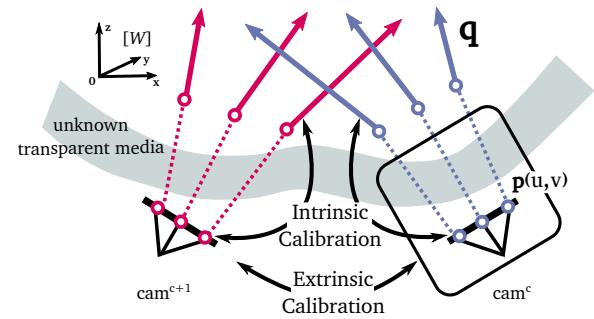


図 3 Ray-Pixel カメラにおけるキャリブレーション

のとき, Ray-Pixel カメラの内部パラメータは対象空間  $\mathcal{X}$  から投影中心までの光路が固定されることによって決定される。

**外部キャリブレーション** 較正済 Ray-Pixel カメラの光線群  $\mathbf{Q}^c$  を共通の座標系で記述する。

#### 3.2 Collinearity Constraint

3 次元空間で同一光線上の点群は同一の画素に投影され, Ray-Pixel カメラにおいては対象空間で一直線上にある。これを Collinearity Constraint と呼ぶ [4]。光線を複数の平面  $\Phi_k$  でサンプリングしたとき, 2 以上の平面の姿勢が決定されれば, ある画素に対応する平面上の点を結ぶことによって 3 次元空間での光線が得られる。本研究では, 複数の較正平面の姿勢推定を行い各画素に対応する  $\mathcal{X}$  内の光線を獲得することが, 内部キャリブレーションに相当する。

### 4. 内部キャリブレーション

$k$  番目の較正平面  $\Phi_k$  を基準とした座標系  $[\mathcal{W}_k]$  で記述された  $x$  を  $x^{[k]}$  で表し,  $\mathbf{p}_i^{[k]} = (u_i, v_i, 0)^\top$  を  $\Phi_k$  上の 3 次元点と定める。3 つの互いに交差する較正平面  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  が与えられたとき,  $[\mathcal{W}_0]$  座標系で  $\mathbf{p}^{[1]}, \mathbf{p}^{[2]}$  は

$$\mathbf{p}^{[0]} = R_{in1}^0 \mathbf{p}^{[1]} + t_{in1}^0, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}^{[0]} = R_{in2}^0 \mathbf{p}^{[2]} + t_{in2}^0, \quad (2)$$

として表現される。ただし,  $R_{in_k}^0$  と  $t_{in_k}^0$  は

$$R_{in_k}^0 = \begin{pmatrix} r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} \\ r_{k4} & r_{k5} & r_{k6} \\ r_{k7} & r_{k8} & r_{k9} \end{pmatrix}, \quad t_{in_k}^0 = \begin{pmatrix} t_{k1} \\ t_{k2} \\ t_{k3} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

で定義される回転行列と並進ベクトルである。画像平面上で任意の各画素に対応する較正平面  $\Phi_k$  上の 2 次元座標を獲得できると仮定すると,  $\mathcal{X}$  内において  $\Phi_k$  を相異なる姿勢で撮影することにより, 同一の画素に投影される  $\Phi_k$  上の点座標をそれぞれの姿勢について得ることができる。内部キャリブレーションでは,  $\Phi_k$  上の座標を利用した  $R_{in_k}^0, t_{in_k}^0$  の推定を行う。

#### 4.1 3 平面の交線を用いた姿勢推定

互いに交差する 3 平面の交線が 3 本与えられると, この 3 本の直線は 3 平面の姿勢を決定することになる。一般に,



図 4 特別な 3 平面の交差 - (a) 互いに平行, (b) 平行な 2 平面, (c) 直線で交差, (d)3 交線が平行

3 平面の交線は特別な場合（図 4）を除いて 1 点で交わる。以下では、較正平面は制御可能であることから、3 平面は互いに交線を持つと仮定して、2 通りの線形解法を提案する。

#### 4.1.1 交線上の 2 点を用いた定式化

3 交線上の 2 点の座標が各較正平面上で得られる（図 5 左）とすると、 $\mathbf{p}_0^{[k]} \sim \mathbf{p}_5^{[k]}$  の点対応について

$$\mathbf{p}_i^{[0]} = R_{in1}^0 \mathbf{p}_i^{[1]} + \mathbf{t}_{in1}^0, (i = 0, 1), \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_i^{[0]} = R_{in2}^0 \mathbf{p}_i^{[2]} + \mathbf{t}_{in2}^0, (i = 2, 3), \quad (5)$$

$$R_{in1}^0 \mathbf{p}_i^{[1]} + \mathbf{t}_{in1}^0 = R_{in2}^0 \mathbf{p}_i^{[2]} + \mathbf{t}_{in2}^0, (i = 4, 5), \quad (6)$$

となり、式 (4)～(6) の  $R_{in1}^0, R_{in2}^0, \mathbf{t}_{in1}^0, \mathbf{t}_{in2}^0$  から成る 18 変数、18 本の連立方程式が得られる。このとき回転行列の各列は各平面の基底となるが、直交制約の欠如およびスケールの不定性から、直線上の対応点情報だけでは一意に解を得ることができない。そこで、直線上の点対応に加えて新たに内積制約を加える。

$$\overline{\mathbf{p}_0^{[1]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_1^{[1]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_4^{[1]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_5^{[1]}} = \overline{\mathbf{p}_0^{[0]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_1^{[0]}} \cdot R_{in1}^0 \cdot \overline{\mathbf{p}_4^{[1]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_5^{[1]}}, \quad (7)$$

$$\overline{\mathbf{p}_2^{[2]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_3^{[2]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_4^{[2]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_5^{[2]}} = \overline{\mathbf{p}_2^{[0]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_3^{[0]}} \cdot R_{in2}^0 \cdot \overline{\mathbf{p}_4^{[2]}} \cdot \overline{\mathbf{p}_5^{[2]}}, \quad (8)$$

ただし、 $\overline{x_i x_j} = x_j - x_i$  である。式 (4)～(8) を  $R_{ink}^0, \mathbf{t}_{exk}^0$  について整理すると、

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_0^{[1]\top} \otimes I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ \tilde{\mathbf{p}}_1^{[1]\top} \otimes I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 9} \\ \mathbf{0}_{3 \times 9} & \tilde{\mathbf{p}}_2^{[2]\top} \otimes I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 9} & \tilde{\mathbf{p}}_3^{[2]\top} \otimes I_{3 \times 3} \\ \tilde{\mathbf{p}}_4^{[1]\top} \otimes I_{3 \times 3} & -\tilde{\mathbf{p}}_4^{[2]\top} \otimes I_{3 \times 3} \\ \tilde{\mathbf{p}}_5^{[1]\top} \otimes I_{3 \times 3} & -\tilde{\mathbf{p}}_5^{[2]\top} \otimes I_{3 \times 3} \\ (\mathbf{p}_5^{[1]} - \mathbf{p}_4^{[1]})^\top \otimes (\mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{p}_0^{[0]})^\top & \mathbf{0}_{1 \times 9} \\ \mathbf{0}_{1 \times 9} & (\mathbf{p}_5^{[2]} - \mathbf{p}_4^{[2]})^\top \otimes (\mathbf{p}_3^{[0]} - \mathbf{p}_2^{[0]})^\top \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{14} \\ r_{17} \\ r_{12} \\ r_{15} \\ r_{18} \\ t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ r_{21} \\ r_{24} \\ r_{27} \\ r_{22} \\ r_{25} \\ r_{28} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{pmatrix}^\top, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0^{[0]} \\ \mathbf{p}_1^{[0]} \\ \mathbf{p}_2^{[0]} \\ \mathbf{p}_3^{[0]} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ (\mathbf{p}_1^{[1]} - \mathbf{p}_0^{[1]}) \cdot (\mathbf{p}_5^{[1]} - \mathbf{p}_4^{[1]}) \\ (\mathbf{p}_3^{[2]} - \mathbf{p}_2^{[2]}) \cdot (\mathbf{p}_5^{[2]} - \mathbf{p}_4^{[2]}) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

で表される連立方程式  $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が得られる。ただし、 $n \times n$  単位行列を  $I_{n \times n}$  で表し  $I_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_{2 \times 3} \mathbf{p}_i^{[k]} = (u_i, v_i)^\top$  の齊次座標を  $\tilde{\mathbf{p}}_i^{[k]} = (u_i, v_i, 1)^\top$  とする。さらに、式 (9) は

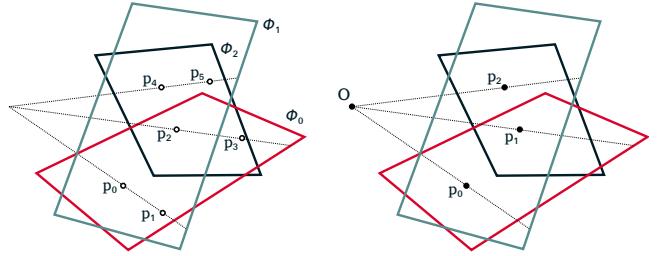


図 5 交差する 3 平面 - 交線上の 2 点（左）、各交線の交点（右）

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0^{[1]} \otimes I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 6} \\ \mathbf{p}_1^{[1]} \otimes I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 6} \\ \mathbf{0}_{2 \times 6} & \mathbf{p}_2^{[2]} \otimes I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 6} & \mathbf{p}_3^{[2]} \otimes I_{2 \times 2} \\ \mathbf{p}_4^{[1]\top} \otimes I_{2 \times 2} & -\mathbf{p}_4^{[2]\top} \otimes I_{2 \times 2} \\ \mathbf{p}_5^{[1]\top} \otimes I_{2 \times 2} & -\mathbf{p}_5^{[2]\top} \otimes I_{2 \times 2} \\ (\mathbf{p}_5^{[1]} - \mathbf{p}_4^{[1]})^\top \otimes I_{2 \times 3} (\mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{p}_0^{[0]})^\top & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ (\mathbf{p}_5^{[2]} - \mathbf{p}_4^{[2]})^\top \otimes I_{2 \times 3} (\mathbf{p}_3^{[0]} - \mathbf{p}_2^{[0]})^\top & \mathbf{0}_{1 \times 6} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{14} \\ r_{17} \\ r_{12} \\ r_{15} \\ r_{18} \\ t_{11} \\ t_{12} \\ r_{21} \\ r_{24} \\ r_{27} \\ r_{22} \\ r_{25} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 3} \mathbf{p}_0^{[0]} \\ I_{2 \times 3} \mathbf{p}_1^{[0]} \\ I_{2 \times 3} \mathbf{p}_2^{[0]} \\ I_{2 \times 3} \mathbf{p}_3^{[0]} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ (\mathbf{p}_1^{[1]} - \mathbf{p}_0^{[1]}) \cdot (\mathbf{p}_5^{[1]} - \mathbf{p}_4^{[1]}) \\ (\mathbf{p}_3^{[2]} - \mathbf{p}_2^{[2]}) \cdot (\mathbf{p}_5^{[2]} - \mathbf{p}_4^{[2]}) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_0^{[1]\top} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \tilde{\mathbf{p}}_1^{[1]\top} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}}_2^{[2]\top} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \tilde{\mathbf{p}}_3^{[2]\top} \\ \tilde{\mathbf{p}}_4^{[1]\top} & -\tilde{\mathbf{p}}_4^{[2]\top} \\ \tilde{\mathbf{p}}_5^{[1]\top} & -\tilde{\mathbf{p}}_5^{[2]\top} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} r_{17} \\ r_{18} \\ r_{13} \\ r_{27} \\ r_{28} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (11)$$

で表される 2 つの連立方程式  $\hat{M}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}, M\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$  に分解することができ、それぞれについて線形に解を得ることができる。式 (11) の解  $\hat{\mathbf{x}}$  は行列  $\hat{M}$  の零空間であるので、 $\hat{M} = USV$  を行列  $\hat{M}$  の特異値分解とし、 $v_j$  を行列  $V$  の  $j$  列目のベクトルであるとすると、

$$\hat{\mathbf{x}} = \alpha v_6. \quad (12)$$

として表される。ただし、 $\alpha$  は任意のスケール係数である。求めるべき姿勢パラメータ  $\mathbf{x}$  は  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}$  の組み合わせによって推定され、 $\alpha$  は回転行列の直交制約

$$\mathbf{r}_{k,1}^\top \mathbf{r}_{k,2} = 0, |\mathbf{r}_{k,1}| = 1, |\mathbf{r}_{k,2}| = 1, \quad (13)$$

によって決定することができる。また、回転行列の第 3 列は第 1 列と第 2 列の外積をとることによって復元することができ、鏡像解として  $R_{ink}^0 = \begin{pmatrix} r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} \\ r_{k4} & r_{k5} & r_{k6} \\ r_{k7} & r_{k8} & r_{k9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{k1} & r_{k2} & -r_{k3} \\ r_{k4} & r_{k5} & -r_{k6} \\ -r_{k7} & -r_{k8} & -r_{k9} \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{ink}^0 = \begin{pmatrix} t_{k1} \\ t_{k2} \\ t_{k3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{k1} \\ t_{k2} \\ -t_{k3} \end{pmatrix}$  の 2 種類が得られる。以上により、3 平面の交線から  $R_{ink}^0, R_{in2}^0, \mathbf{t}_{in1}^0$ 、and  $\mathbf{t}_{in2}^0$  を同時に推定することができる。

#### 4.1.2 3 交線の交点を用いた定式化

3 平面の交差線が 1 点で交わることを利用して、回転行列のみを変数とした連立方程式を解くことによっても、較正平面の姿勢推定を行うことができる。 $\mathbf{O}^{[k]}$  を  $[\mathcal{W}_k]$  座標

系で表された 3 交線の交点であるとすると、4.1.1 節と同様に点対応と内積式から

$$\overline{\mathbf{O}^{[0]}\mathbf{p}_0^{[0]}} = R_{in1}^0 \overline{\mathbf{O}^{[1]}\mathbf{p}_0^{[1]}}, \quad (14)$$

$$\overline{\mathbf{O}^{[0]}\mathbf{p}_1^{[0]}} = R_{in1}^0 \overline{\mathbf{O}^{[2]}\mathbf{p}_1^{[2]}}, \quad (15)$$

$$R_{in1}^0 \overline{\mathbf{O}^{[1]}\mathbf{p}_2^{[1]}} = R_{in2}^0 \overline{\mathbf{O}^{[2]}\mathbf{p}_2^{[2]}}, \quad (16)$$

$$\overline{\mathbf{O}^{[1]}\mathbf{p}_0^{[1]}} \cdot \overline{\mathbf{O}^{[1]}\mathbf{p}_2^{[1]}} = \overline{\mathbf{O}^{[0]}\mathbf{p}_0^{[0]}} \cdot R_{in1}^0 \overline{\mathbf{O}^{[1]}\mathbf{p}_2^{[1]}} \quad (17)$$

$$\overline{\mathbf{O}^{[2]}\mathbf{p}_1^{[2]}} \cdot \overline{\mathbf{O}^{[2]}\mathbf{p}_2^{[2]}} = \overline{\mathbf{O}^{[0]}\mathbf{p}_1^{[0]}} \cdot R_{in2}^0 \overline{\mathbf{O}^{[2]}\mathbf{p}_2^{[2]}} \quad (18)$$

の方程式が得られる。これを  $R_{in_k}^0$  について整理すると、

$$M' = \begin{pmatrix} (\mathbf{p}_0^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & (\mathbf{p}_1^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes I_{3 \times 3} \\ (\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes I_{3 \times 3} & -(\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes (\mathbf{p}_0^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]})^\top & I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes (\mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]})^\top \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{14} \\ r_{17} \\ r_{12} \\ r_{15} \\ r_{18} \\ r_{21} \\ r_{24} \\ r_{27} \\ r_{22} \\ r_{25} \\ r_{28} \end{pmatrix}^\top, \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]} \\ \mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ (\mathbf{p}_0^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]}) \cdot (\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]}) \\ (\mathbf{p}_1^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]}) \cdot (\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]}) \end{pmatrix} \quad (19)$$

で表される  $\hat{M}'\hat{\mathbf{x}'} = \hat{\mathbf{b}'}$  の線形方程式を得ることができる。また、式 (19) は

$$M' = \begin{pmatrix} (\mathbf{p}_0^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & (\mathbf{p}_1^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes I_{2 \times 2} \\ (\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes I_{2 \times 2} & -(\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]})^\top \otimes I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_0^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]})^\top & I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]})^\top \otimes I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]})^\top \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}'} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{14} \\ r_{17} \\ r_{12} \\ r_{15} \\ r_{24} \\ r_{22} \\ r_{25} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}'} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_0^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]}) \\ I_{2 \times 3}(\mathbf{p}_1^{[0]} - \mathbf{O}^{[0]}) \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ (\mathbf{p}_0^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]}) \cdot (\mathbf{p}_2^{[1]} - \mathbf{O}^{[1]}) \\ (\mathbf{p}_1^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]}) \cdot (\mathbf{p}_2^{[2]} - \mathbf{O}^{[2]}) \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\hat{\hat{M}'} = \begin{pmatrix} I_{2 \times 3}\tilde{\mathbf{p}}_0^{[1]\top} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & I_{2 \times 3}\tilde{\mathbf{p}}_1^{[2]\top} \\ I_{2 \times 3}\tilde{\mathbf{p}}_2^{[1]\top} & -I_{2 \times 3}\tilde{\mathbf{p}}_2^{[2]\top} \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{\mathbf{x}'}} = \begin{pmatrix} r_{17} \\ r_{18} \\ r_{27} \\ r_{28} \end{pmatrix}, \quad \hat{\hat{\mathbf{b}'}} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (21)$$

で表される  $\hat{M}'\hat{\mathbf{x}'} = \hat{\mathbf{b}'}, \hat{\hat{M}'}\hat{\hat{\mathbf{x}'}} = \hat{\hat{\mathbf{b}'}}$  の形に分解することで、それぞれについて線形に解が得られる。また、式 (13) の回転行列に関する直交制約により  $\hat{\mathbf{x}'}, \hat{\hat{\mathbf{x}'}}$  から  $R_{in1}^0, R_{in2}^0$  を得られ、 $\mathbf{t}_{in1}^0, \mathbf{t}_{in2}^0$  は以下のように一意に復元することができる。

$$\mathbf{t}_{in1}^0 = -R_{in1}^0 \mathbf{O}_1^{[1]} + \mathbf{O}_0^{[0]}, \quad (22)$$

$$\mathbf{t}_{in2}^0 = -R_{in2}^0 \mathbf{O}_2^{[2]} + \mathbf{O}_0^{[0]}. \quad (23)$$

## 5. 外部キャリブレーション

前節までの定式化によって光線をサンプリングする平面の姿勢が得られ、各画素に対応する光線群  $\mathbf{Q}^c$  が得られた。ここで、外部キャリブレーションの目的は異なる Ray-Pixel カメラ  $c, c+1$  のローカル座標系  $[\mathcal{W}]^c, [\mathcal{W}]^{c+1}$  間の変換  $R_{exc}^{c+1}, \mathbf{t}_{exc}^{c+1}$  を求めることである。本章で扱う外部キャリブレーションは次に述べる (1) 平面共有法、(2) 光線共有法に分類される。

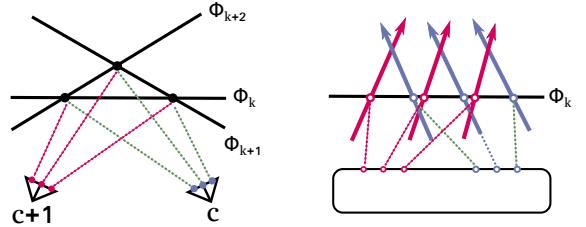


図 6 平面共有法

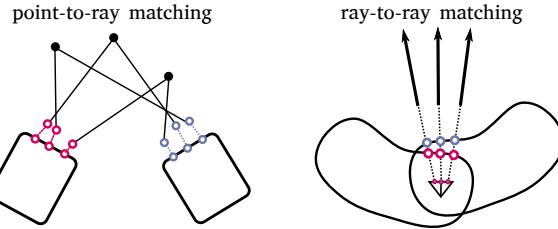


図 7 ray-to-ray matching による光線共有法

### 5.1 平面共有法

平面共有法とは、複数のカメラである姿勢の較正平面を共有して撮影することによって、1 つの Ray-Pixel カメラとして較正してしまう方法である。較正平面の交差情報は各カメラで観測される光線の分布とは独立であるため、物理的なカメラが 1 台のときと同様に較正することができる。これは  $[\mathcal{W}]^c = [\mathcal{W}]^{c+1}$  のケースである。

### 5.2 光線共有法

対して、重複する視野を持つ Ray-Pixel カメラ同士では光線共有法が適用できる。これは、2 つの Ray-Pixel カメラで同一の光線を共有し、光線間の変換を求めるこによって外部キャリブレーションを行う方法である。2 台の実カメラ  $\{c-1, c\}$  と  $\{c, c+1\}$  から成る 2 つの Ray-Pixel カメラを考えたとき、各 Ray-Pixel カメラの光線  $\mathbf{Q}$  はそれぞれ  $[\mathcal{W}_k], [\mathcal{W}_{k'}]$  座標系で記述されている。このとき、共有カメラ  $c$  の各画素に対応する光線は同一のものであるので、共有光線の ray-to-ray マッチングを行うことによって  $\mathbf{Q}^{[k]}, \mathbf{Q}^{[k']}$  間の座標変換を推定する。この ray-to-ray マッチングは、既存の線分マッチングの問題として解くことができ [15],  $R_{exc}^{c+1}, \mathbf{t}_{exc}^{c+1}$  を推定することができる。

### 5.3 全周囲撮影における外部キャリブレーション例

先に述べた 2 つの方法を用いた外部キャリブレーションの手順を以下に示す。

- (1) 2 組ごとの実カメラのペア  $\{c, c+1\}$  について、平面共有法によってキャリブレーションを行う。
- (2) 実カメラ  $\{c-1, c\}$  と  $\{c, c+1\}$  で構成される Ray-Pixel カメラのペアで共有カメラ  $c$  を用いた光線共有法によって外部キャリブレーションを行う。

外部キャリブレーションが完了すると、各カメラで観測された光線群  $\mathbf{Q}^c$  を共通の座標系で記述することができ、複

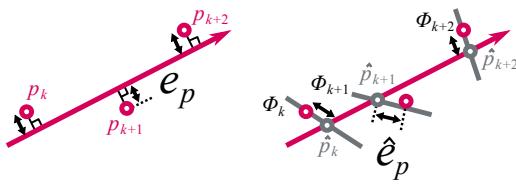


図 8 Approximated re-intersection error

数の Ray-Pixel カメラ全体を单一の Ray-Pixel カメラとして取り扱うことができる。

## 6. バンドル調整

前章までは重複視野を持ち、2 台ずつの実カメラで構成される Ray-Pixel カメラ群における、内部パラメータと外部パラメータの導出について述べた。多視点撮影システムの構築には、局所最適ではなく全体最適なパラメータを求める必要がある [1] ため、導出パラメータを初期値としたバンドル調整を行う。

### 6.1 Collinearity Constraint によるバンドル調整

3.2 節で述べた  $\Phi_k$  上の点群が満たす Collinearity Constraint をバンドル調整に使用する。Collinearity Constraint を利用したキャリブレーション手法 [4] では 3 点が直線上に並ぶことを直接定式化していたが、バンドル調整では光線と点との距離を最小化する [11] ことを定式化する。

### 6.2 再交差誤差

従来のカメラキャリブレーションでは、オブジェクトの 3 次元点から画像平面への投影による再投影誤差を較正結果の評価指標とするが、提案手法では復元された光線と各較正平面上の観測点の距離を再交差誤差とし、再投影誤差の代わりに用いる。再交差誤差では、光線との距離の誤差  $e_p$  を各較正平面上で評価するが、今回は計算コストを抑えるため点と光線との距離  $\hat{e}_p$  を近似的な再交差誤差として用いる（図 8）。

較正平面の姿勢パラメータ  $R_{in k+1}, t_{in k+1}$ ,  $R_{ex k+1}$ ,  $t_{ex k+1}$ , … を  $\mathbf{h}$  で表す。同一光線上の  $m$  点を  $\mathbf{p}_k(\mathbf{h}) = (x_k(\mathbf{h}), y_k(\mathbf{h}), z_k(\mathbf{h}))^\top$  ( $k = 1, \dots, m$ ) とすると、同一光線上の点群の共分散行列は

$$S(\mathbf{h}) = \frac{\sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} (x_k - \bar{x})^2 & (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) & (x_k - \bar{x})(z_k - \bar{z}) \\ (y_k - \bar{y})(x_k - \bar{x}) & (y_k - \bar{y})^2 & (y_k - \bar{y})(z_k - \bar{z}) \\ (z_k - \bar{z})(x_k - \bar{x}) & (z_k - \bar{z})(y_k - \bar{y}) & (z_k - \bar{z})^2 \end{pmatrix}}{n},$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11}(\mathbf{h}) & s_{12}(\mathbf{h}) & s_{13}(\mathbf{h}) \\ s_{12}(\mathbf{h}) & s_{22}(\mathbf{h}) & s_{23}(\mathbf{h}) \\ s_{13}(\mathbf{h}) & s_{23}(\mathbf{h}) & s_{33}(\mathbf{h}) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

として表される、ただし、 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  は点群の中点であるとする。 $m$  点が同一直線上にあるとき点群は光線方向への分散が最大となり、それに直交する方向の分散は 0 になる。共分散行列  $\Sigma(\mathbf{h})$  の固有値が各方向への分散に対応するため、

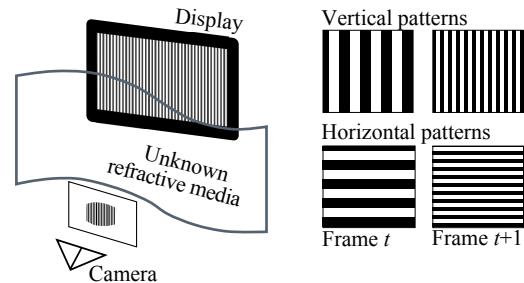


図 9 グレイコード法 [3]

行列  $\Sigma(\mathbf{h})$  を固有値分解したとき、第 1 固有値が光線方向への分散に対応し、第 2,3 固有値は 0 となる。共分散行列  $\Sigma(\mathbf{h})$  の行列式  $|\lambda I - S(\mathbf{h})| = 0$  は

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} \lambda - s_{11} & -s_{12} & -s_{13} \\ -s_{12} & \lambda - s_{22} & -s_{23} \\ -s_{13} & -s_{23} & \lambda - s_{33} \end{vmatrix}, \\ &= \lambda^3 - \lambda^2(s_{11} + s_{22} + s_{33}), \\ &\quad - \lambda(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2 - s_{22}s_{33} - s_{11}s_{33} - s_{11}s_{22}), \\ &\quad + s_{11}s_{23}^2 + s_{22}s_{13}^2 + s_{33}s_{12}^2, \\ &\quad - s_{11}s_{22}s_{33} - 2s_{12}s_{13}s_{23}, \\ &= \lambda^2(\lambda - g_2(\mathbf{h})) + \lambda g_1(\mathbf{h}) + g_0(\mathbf{h}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

と書ける。ただし、 $g_0(\mathbf{h})$ ,  $g_1(\mathbf{h})$ ,  $g_2(\mathbf{h})$  は  $\lambda^0$ ,  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$  の係数をそれぞれ表すとする。第 2,3 固有値が 0 となることから固有方程式は

$$D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - \alpha) = 0, \quad (26)$$

として書き直せる。このとき、 $\alpha$  は光線方向の分散に対応する。式 (25)(26) から

$$\begin{aligned} g_0(\mathbf{h}) &= 0, \\ g_1(\mathbf{h}) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

が得られ、 $g_0(\mathbf{h})$ ,  $g_1(\mathbf{h})$  をすべての光線について最小化することによって全体最適なパラメータを求める。

## 7. 評価実験

以上の内容について、シミュレーションと実環境によって評価を行った。

### 7.1 実験設定

任意の画素に対応する較正平面上の 2 次元座標を獲得する手段としてグレイコードパターン（図 9）を用いる。

実験設定を図 10 に示す。厚さ 5mm、直径 300mm の円柱水槽中心から約 350mm の位置に 5 台のカメラを等間隔に設置し、撮影には Pointgrey 社のカメラ (FL3-U3-88S2C-C) を使用した。

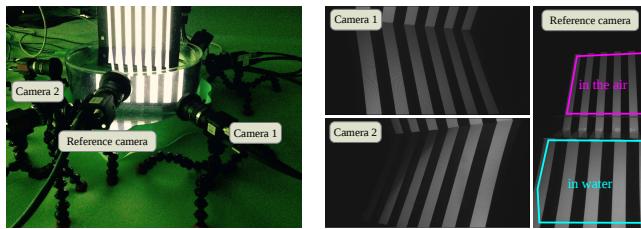


図 10 実験設定

## 7.2 撮影画像を用いた交線の検出

較正平面の交線を用いた内部キャリブレーション手法を4節で示したが、実験では較正平面同士の交線を検出する方法として、較正パターン画像の画素密度マップを用いる。カメラ解像度がタブレットディスプレイの解像度よりも十分高い場合、ディスプレイ上のあるブロックは画像平面上で複数の画素に投影される。このとき、画像平面上で同一のブロックに対応する画素数を合計することによって、画素密度マップを作成することができる。

理想的な透視投影の環境においては、画素密度マップはディスプレイの奥行き情報を表すが、未知の反射・屈折層によって歪みが生じる場合、この画素密度マップは実際の較正平面の奥行き情報を直接反映したものとはならない。しかしながら、画素密度値が同程度の画素を選択することにより、同じ奥行きレベルのブロックを検出することができる。すなわち、相異なる姿勢で撮影されたディスプレイ平面上で、交差している領域を検出できることになる。

## 7.3 評価指標

### 7.3.1 回転行列、並進ベクトル誤差

光線方向は、各較正平面の姿勢によって決定されるため、キャリブレーションによって得られた光線群  $\mathbf{Q}$  の質を較正平面の姿勢パラメータ  $R, t$  の真値との誤差として評価することができる。提案手法によって推定された回転行列  $R$  は、Riemmanian distance[16]による評価を行う。 $R_g, t_g$  を  $R, t$  の真値とし、 $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{tr} R' - 1}{2}\right)$  と定めると、回転行列の誤差  $E_R$  は

$$E_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\log(R^\top R_g)\|_F, \quad (28)$$

$$\log R' = \begin{cases} 0 & (\theta = 0), \\ \frac{\theta}{2 \sin \theta} (R - R'^\top) & (\theta \neq 0), \end{cases} \quad (29)$$

として定義される。ただし、 $\|\cdot\|_F$  はフロベニウスノルムを表す。

並進ベクトル誤差  $E_T$  は平均二乗誤差 (RMSE) として

$$E_T = \sqrt{\|t - t_g\|^2 / 3}. \quad (30)$$

のように評価する。

### 7.3.2 再交差誤差

6.2節で示したように、多視点キャリブレーションで広く用いられている再投影誤差と同様に、推定光線と観測点の

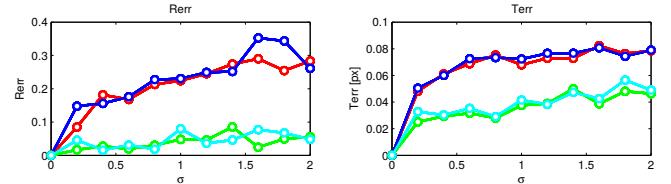


図 11 Rotation / Translation Vector Errors

距離を測定する再交差誤差を光線  $\mathbf{Q}$  の評価指標として用いる。

$k$  番目の較正平面上で  $i$  番目の観測点を  $\mathbf{p}_i^{[k]}$  とし、較正平面と対応する光線との交点を  $\hat{\mathbf{p}}_i^{[k]}$  とすると、再交差誤差を以下のように定義できる。

$$E_p = \frac{1}{|I| |K|} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \|\hat{\mathbf{p}}_i^{[k]} - \mathbf{p}_i^{[k]}\|^2, \quad (31)$$

ただし、 $I$  と  $K$  はそれぞれ画素と較正平面の集合である。

## 7.4 シミュレーション評価

提案手法の精度を確認するため、図 10 に示す設定でシミュレーションデータによる評価を行った。カメラ解像度を  $1280 \times 960$  ピクセル、ディスプレイ解像度を  $1024 \times 2048$  ピクセルとした。ここでは、1つのディスプレイ座標系が世界座標系を決定するため、物理的なスケールは全てディスプレイ画素のスケールで表現されることになる。また、カメラは半径 2048 ピクセルの水槽中心から 2662.4 ピクセルの位置に設置され、水の屈折率は 1.3 であるとした。ただし水槽は厚みがなく、入射光は境界で 1 度のみ屈折する。

各試行では 3 つの相異なる姿勢のディスプレイ  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  を生成し、4章の内部キャリブレーションを適用した。このとき回転行列はオイラー角で  $[-\pi/3 : \pi : 3]$  の範囲で、並進移動ベクトルは  $[-50 : 50]$  ピクセルの範囲でランダムに生成した。

### 7.4.1 平面の交線を用いた内部キャリブレーション

3 つの相異なる姿勢の較正平面  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  の姿勢パラメータから、平面の交線を得ることができる。ここで各試行毎に検出エラーを表現するものとして、 $[-\epsilon : \epsilon]$ ,  $\epsilon = 0, \dots, 2.0$  ピクセルのガウシアンノイズを各点に加えた上で 4.1.1 節、4.1.2 節で述べた内部キャリブレーションをそれぞれ行った。

図 11において赤、青のマーカは 4.1.1 節、緑、シアンのマーカは 4.1.2 節で定式化を行った内部キャリブレーション結果であり、各点は各ノイズレベルで推定されたパラメータの 100 回平均を示している。

### 7.4.2 Collinearity Constraint を用いたバンドル調整

線形キャリブレーション結果を初期値として、6.1 節で述べた Collinearity Constraint を用いたバンドル調整を行った。 $\Phi_k$  上の各点にはグレイコードのデコードエラーを模倣するものとして、 $[-\epsilon : \epsilon]$ ,  $\epsilon = 0, \dots, 2.0$  ピクセルの一様分布ノイズを加えた。

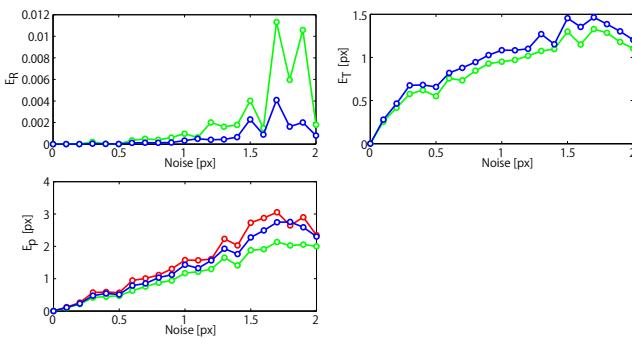


図 12  $E_R$ ,  $E_T$ ,  $E_p$

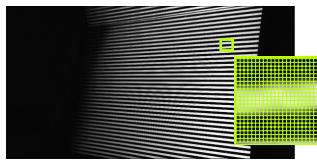


図 13 撮影画像からの画素密度マップ作成

図 12において、赤、青、緑のマーカはそれぞれ  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ における誤差を示し、各点は各ノイズレベル毎の 100 回平均誤差を示している。この結果からは、バンドル調整後のキャリブレーション誤差が妥当な範囲に収まっていることが認められる。

## 7.5 実画像を用いた評価

提案手法の実環境における評価のために、図 10 に示す環境での実験を行った。実験では、タブレットディスプレイの約半分を水上に露出させ、水上に露出したディスプレイ画像を比較手法 [15] によるキャリブレーションの入力として利用した。提案手法には水中のディスプレイ画像のみを用いた。

### 7.5.1 撮影画像からの交線検出

7.2 節で示したように、実験ではピクセル密度マップを生成することによる交線検出を行った。解像度  $1366 \times 768$  ピクセルのタブレットに映し出したグレイコードパターンを  $4096 \times 2160$  の解像度のカメラで撮影し、画像平面上でタブレットの  $8 \times 8$  ピクセルブロックが対応する画素数を画素毎に集計した結果を図 13 に示す。この画素密度マップを各姿勢で撮影された画像毎に作成し、それぞれの差分をとることによって、同じ密度レベルの画素を検出することができる。画素密度マップをもとに検出した交線と、比較手法で求められた平面の姿勢パラメータから導出された交線の比較を図 14 に示す。青、赤のマーカ (\*) は  $[W_0]$  座標系にデコードされたピクセル密度マップであり、マーカ (o) はそれぞれの平面上での推定交線、(-) は比較手法によって推定された交線である。

### 7.5.2 バンドル調整

図 16 にカメラ 5 台、3 台の場合の内部キャリブレーション

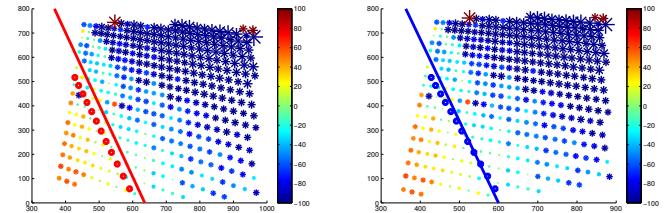


図 14 各較正平面上の検出交線

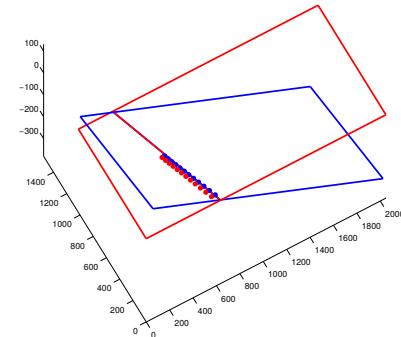


図 15 estimation result

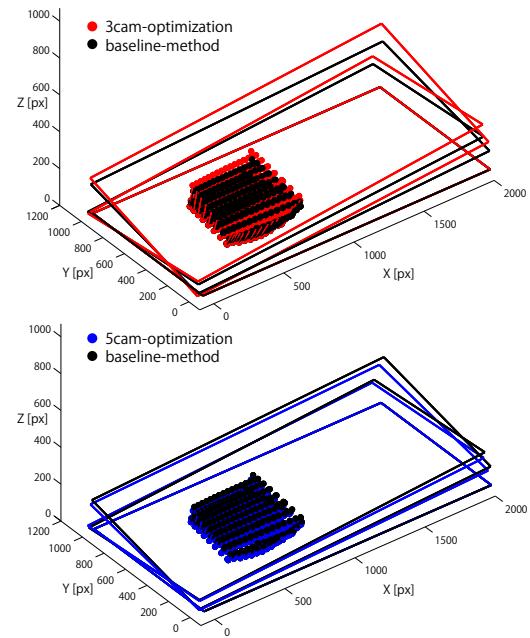


図 16 カメラ 3 台（上）とカメラ 5 台（下）の内部キャリブレーション結果

ン結果を示す。ここで、カメラ 5 台の場合は閉ループを持っている。図 17 と図 18 は基準較正平面上における再交差誤差  $E_p$  の分布と、比較手法に対する復元光線を示している。このとき、比較手法の再投影誤差は画像平面上で 0.88 ピクセルであった。これらの結果からは、水中の画像のみを用いた提案手法でのキャリブレーションによって、水上の画像を用いた比較手法に対してほぼ同等な精度を達成できたことがいえる。

## 8. まとめ

本稿では、Ray-Pixel カメラの新たなキャリブレーション

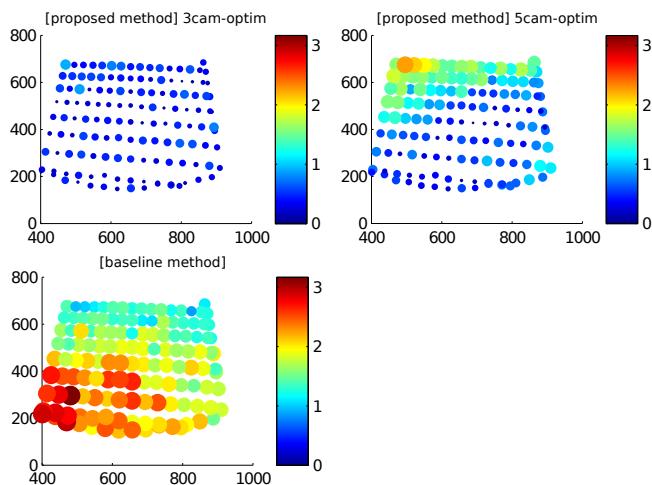


図 17 カメラ 3 台（上段左），カメラ 5 台（上段右），比較手法（下段）における再交差誤差の分布

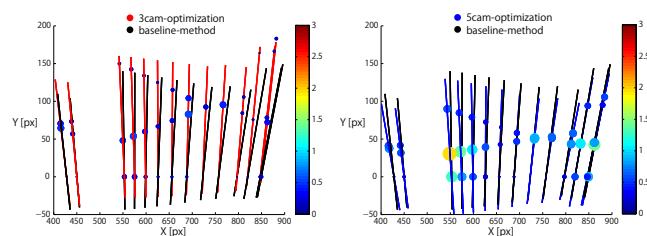


図 18 カメラ 3 台（左），カメラ 5 台（右）の復元光線

ン法として，3 平面の交線を用いた方法を提案した。さらに，重複視野をもつ Ray-Pixel カメラ群に対して ray-to-ray マッチングによる外部キャリブレーションを行うことにより，Ray-Pixel カメラの多視点撮影系を構築した。これらの方法は Ray-Pixel カメラ光線の分布クラスに依存しないため，全てのクラスの Ray-Pixel カメラに適用可能な汎用キャリブレーション法を示した。

## 9. 謝辞

本研究は科研費（課題番号 26240023）の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] Hartley, R. I. and Zisserman, A.: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press (2000).
- [2] Claus, D. and Fitzgibbon, A. W.: A rational function lens distortion model for general cameras, *Proc. CVPR*, Vol. 1, pp. 213–219 (2005).
- [3] Grossberg, M. and Nayar, S.: The Raxel Imaging Model and Ray-Based Calibration, *IJCV*, Vol. 61, No. 2, pp. 119–137 (2005).
- [4] Sturm, P. and Ramalingam, S.: A Generic Concept for Camera Calibration, *Proc. ECCV*, pp. 1–13 (2004).
- [5] Narasimhan, S., Nayar, S., Sun, B. and Koppal, S.: Structured light in scattering media, *Proc. ICCV*, Vol. I, pp. 420–427 (2005).
- [6] Trifonov, B., Bradley, D. and Heidrich, W.: Tomographic reconstruction of transparent objects, *Proc. of*

*Eurographics Conf. on Rendering Techniques*, pp. 51–60 (2006).

- [7] Gregson, J., Krimerman, M., Hullin, M. B. and Heidrich, W.: Stochastic Tomography and its Applications in 3D Imaging of Mixing Fluids, *Proc. ACM SIGGRAPH*, pp. 52:1–52:10 (2012).
- [8] Yano, T., Nobuhara, S. and Matsuyama, T.: 3D Shape from Silhouettes in Water for Online Novel-view Synthesis, *IPSJ Trans. on CVA*, Vol. 5, pp. 65–69 (2013).
- [9] Ramalingam, S., Sturm, P. and Lodha, S. K.: Generic Calibration of Axial Cameras, Technical Report RR-5827 (2005).
- [10] Ramalingam, S., Sturm, P. and Lodha, S. K.: Towards Complete Generic Camera Calibration, *Proc. CVPR*, Vol. 1, San Diego, United States, pp. 1093–1098 (2005).
- [11] Ramalingam, S., Lodha, S. K. and Sturm, P.: A Generic Structure-from-motion Framework, *Comput. Vis. Image Underst.*, Vol. 103, No. 3, pp. 218–228 (2006).
- [12] Pless, R.: Using Many Cameras as One, *Proc. CVPR*, pp. 587–593 (2003).
- [13] Sturm, P. F.: Multi-View Geometry for General Camera Models., *Proc. CVPR*, IEEE Computer Society, pp. 206–212 (2005).
- [14] Li, H., Hartley, R. I. and Kim, J.-H.: A linear approach to motion estimation using generalized camera models., *Proc. CVPR*, IEEE Computer Society (2008).
- [15] Zhang, Z. and Faugeras, O. D.: Determining motion from 3D line segment matches: a comparative study, *Image and Vision Computing*, Vol. 9, No. 1, pp. 10–19 (1991).
- [16] Moakher, M.: Means and Averaging in the Group of Rotations, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 24, No. 1, pp. 1–16 (2002).