Vol.2015-GI-33 No.15
2015/3/6

# 不等式を満たすチョコレートゲームの必勝法解析

福井 昌則[2,a)] 中村 駿佑[1,b)] 宮寺 良平[2,c)]

**概要**：本稿では，不等式を満たすチョコレートゲームの必勝法解析について述べる．チョコレートゲームは，Robin が提案したゲームであり，組み合わせゲームである CHOMP の変種であるが，CHOMP と異なるのは，必勝法が計算できるタイプが多数存在することである．長方形のチョコレートは，伝統的な石取りゲームと数学的に同値であるが，私達が研究するチョコレートゲームは，座標間に不等式の関係が成立しているものであり，そのチョコレートに対してグランディ数を求める公式を導出した．本稿では，私達の研究しているチョコレートゲームの説明，数学的背景，そしてモバイル端末向けに作成したチョコレートゲームについて述べる．

**キーワード**：チョコレートゲーム　石取りゲーム　CHOMP　グランディ数　ニム和

## 1. 序文とチョコレートゲームの定義

チョコレートゲームは， Robin [3] が提案したもので，長方形のチョコレートにおいて，ある部分だけに毒が入っていて食べることができない．2 人のプレイヤーが交互にチョコレートの切り取り直線に添って 2 つに分けて (縦もしくは横一直線に切って)，一方を食べる．毒の入っているチョコレートを食べることになったプレイヤーが負けである．図 1 を見るとわかるように，このチョコレートでは，垂直方向の切断と，水平方向への切断が独立であるので，4 つの山を持つ石取りゲームと数学的に同値になる．なお，ここで毒の入った部分の上側，下側，左側，右側において，切ることができる回数の最大値を，それぞれの 4 つの山の石の個数と対応させることでこの同値性がはっきりとわかる．

例えば，図 1 のチョコレートを見ていただきたい．上下左右の順番に考えると，石がそれぞれ $3, 3, 4, 13$ あるような 4 つの山からなる石取りゲームと同値になる．

Robin [3] が導入したチョコレートゲームは，数学的には伝統的な石取りゲームと同値であったが，本稿では，図 2 から，図 4 に至るような，いろいろな形をしたチョコレートゲームを考える．このようなチョコレートゲームは，著者達の研究グループが作ったものであるが，垂直方向の切断によって，高さが減り，結果として水平方向の切断可能な回数が減る可能性がある．このようなタイプのチョコレートゲームを，石取りゲームの一種として考えることは可能であるが，その場合にはある山の石を取ることが，他の山の石の個数に影響するという条件のついた石取りゲームになる．このような条件は石取りゲームとしてはやや不自然であるが，チョコレートゲームの場合はチョコレートの幾何的な性質からこの条件が自然に出る．

チョコレートゲームに似たタイプの組み合せゲームとしては，CHOMP が良く知られている．CHOMP では，一番上の左のところが毒の入ったチョコレートで，プレイヤーは交互にあるブロックを選び，そのブロックの右側と下側の部分を一緒に食べる．このゲームについては多くの人が研究しているが，一般的な必勝法は見つかっていない．幅が 3 という特定の形に関しては，必勝法が見つかっている．それについては， Zeilberger [4] を見ていただきたい．

**例 1.1.** チョコレートゲームの例

図 5 のチョコレートは，[7] において，図 6 のチョコレートは，[8] において既に研究を掲載している．そして，[10] においては，Mathematica または Mathematica player (無料) を持っている人なら実際に動かして考えることができる．

また，図 2,3,4 のチョコレートについては，[9],[2] に発表しているが，本稿の結果は，特別な場合として，図 2,3,4 のチョコレートゲームを含む．

ここで本稿において使われる組み合せゲームの概念について説明しておく．詳しくは [5] などを見ていただきた

1 大阪大学
Osaka University
2 関西学院高等部
Kwansei Gakuin High School
a) masanori.dev@gmail.com
b) nakashun1994@gmail.com
c) runners@kwansei.ac.jp

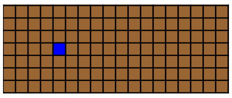

**図 1**　長方形チョコレート

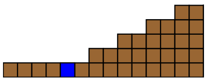

**図 2**　階段状チョコレート

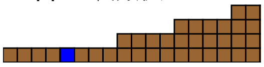

**図 3**　階段状チョコレート

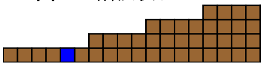

**図 4**　階段状チョコレート

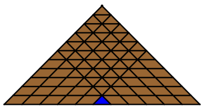

**図 5**　三角形チョコレート

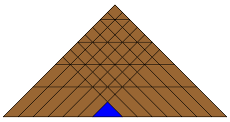

**図 6**　三角形チョコレート

い．

**定義 1.1.** ニム和 $x \oplus y$ を次のように定義する．$x, y$ を 2 進数で表示することで，それぞれ $x = \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i$ と表す．ここで $x_i, y_i \in \{0,1\}$ である．

$$x \oplus y = \sum_{i=0}^{n} w_i 2^i, \qquad (1)$$

ここで $w_i = x_i + y_i \ (mod\ 2)$ とする．

チョコレートゲームは引き分けのない不偏ゲームであるから，チョコレートゲームのそれぞれの状態には次の 2 つの場合しかない．

**定義 1.2.** $(a)$ $\mathcal{N}$-position は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって必ず勝利できる状態を言う．

$(b)$ $\mathcal{P}$-position は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーがどのような戦略を使っても，後手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって必ず勝利できる状態を言う．

**定義 1.3.** 二つのゲーム $G, H$ の直和を $G + H$ と表す．これは，プレイヤーが自分の番になると，2 つのゲーム $G$ または，$H$ のどちらか一方だけを選んで，プレーすることによって成立するゲームである．

図 2 から 図 4 において，各チョコレートゲームは，毒の入った正方形の部分の左側のチョコレートと，毒の入った正方形の部分の右側のチョコレートの直和になっていると考えることができる．

**定義 1.4.** チョコレートゲーム $G$ から，一手で行くことができる状態すべての集合を $move(G)$ で表す．

**定義 1.5.** (1) 集合 $S$ の *minimum excluded value* $(mex)$ とは，$S$ に属さない非負整数のうちで最小の非負整数のことである．

(2) 不偏ゲーム $G$ においては，グランディ数 $\mathcal{G}$ と呼ばれるものを定義することができる．これは，ニム値とも呼ばれ，次のように再帰的に定義される．$\mathcal{G}(G) = mex\{\mathcal{G}(H) : H \in move(G)\}$．

**例 1.2.** $mex(\{1,2,3,4\}) = 0$，$mex(\{0,2,3,4\}) = 1$ と計算できる．

グランディ数 $\mathcal{G}$ が組み合せゲームにおいて強力な道具であることは，次の結果からわかる．

**定理 1.1.** $G$ と $H$ を不偏ゲームとすると，

- $\mathcal{G}(G) = 0$ となるのは，$G$ が $\mathcal{P}$-position であるときに限る．また，ゲームの直和に関しては，次の式が成り立つ．
- $\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$．

この定理の証明に関しては，[5] を見ていただきたい．

**例 1.3.** 例として，図 7 のグランディ数を求める．

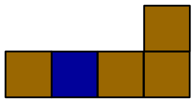

**図 7**　$\{x, y, z\} = \{1, 1, 2\}$, $y \leq \lfloor z/2 \rfloor$

**図 8**　終了時の状態

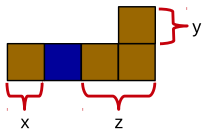


**図 9**　座標の定義

図 7 を図 8 の状態にして相手に渡すと勝ちとなり，図 8 のグランディ数を 0 と定義する．各チョコレートの行き先を示した図が図 10 となる．各チョコレートから矢印で結ばれているところが，一手で移動出来るチョコレートである．グランディ数は，与えられた状態から一手で移動することが出来る全ての行き先のグランディ数からなる非負整数の集合 S に属さない最小の非負整数である．よって，図 8(グランディ数 0) から，矢印の逆方向に向かって，再帰的にグランディ数を計算していくと，図 11 のようになる．よって，図 7 のグランディ数は 2 と計算できる．

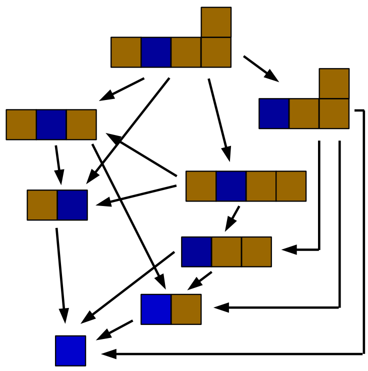

**図 10**　状態遷移図

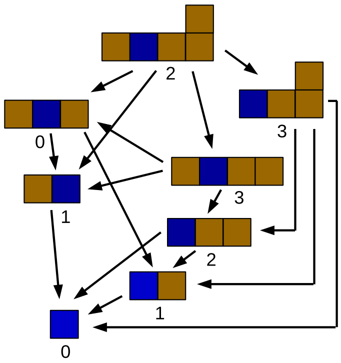


**図 11**　グランディ数

## 2. $CB(f,y,z)$ のグランディ数が $y \oplus z$ となるチョコレートゲーム

$Z_{\geq 0}$ を非負整数の集合とする．この章について詳しくは [1] にある．

**定義 2.1.** 関数 $f$ が下記の (1),(2) を満たすとする．
(1) 任意の $t \in Z_{\geq 0}$ に対して $f(t) \in Z_{\geq 0}$ である．
(2) $f$ は単調増加である．すなわち，$f(u) \leq f(v)$ が $u \leq v$ を満たすような $u,v \in Z_{\geq 0}$ に対して成り立つ．

**定義 2.2.** 関数 $f$ は定義 2.1 の条件を満たすものとする．$y,z \in Z_{\geq 0}$ に対して，チョコレート $CB(f,y,z)$ を次のように定義する．
このチョコレートは，縦の列が $z+1$ 個あり，0 番目から，1,2,...,$z$ 番目までである．なお，0 番目に毒の入ったチョコレートがある．そして，$i$ 番目の縦の列の高さは $i=0,1,...,z$ に対して，$t(i)=\min(f(i),y)+1$ で与えられる．
すなわち，チョコレートの形は，$z$ の値によって横の長さが決まり，$i$ 番目の縦の列の高さは $f(i)+1$ で高さの制限がついているが，水平に切ることによって $y$ の値を減らせば，高さは $\min(f(i),y)+1$ となる．

**例 2.1.** チョコレート $CB(f,y,z)$ の例．

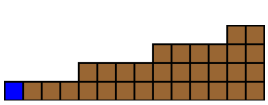

**図 12**　$CB(f,3,13)$ $f(t)=\lfloor\frac{t}{4}\rfloor$

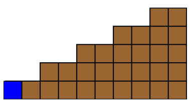

**図 13**　$CB(f,4,9)$ $f(t)=\lfloor\frac{t}{2}\rfloor$

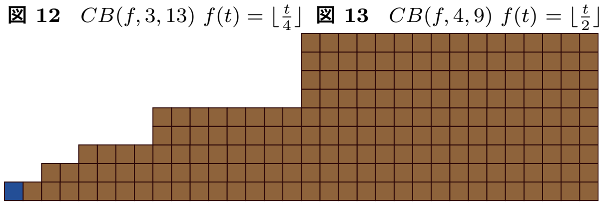

**図 14**　$CB(f,8,31)$ $f(0)=f(1)=0$ かつ $t>1$ に対して，$f(t)=2^{\lfloor log_2 t\rfloor-1}$

**定義 2.3.** 関数 $h$ が定義 2.1 の条件と，下記の (1) を満たすとする．

(1)　任意の $z,z' \in Z_{\geq 0}$ に対して，自然数 $i$ について

$$\lfloor\frac{z}{2^i}\rfloor = \lfloor\frac{z'}{2^i}\rfloor$$

を満たすとき，

$$\lfloor\frac{h(z)}{2^{i-1}}\rfloor = \lfloor\frac{h(z')}{2^{i-1}}\rfloor$$

が成り立つ．

補題 2.1 と 補題 2.2 において，定義 2.3 の条件を満たす関数の例を与える．ただし，このような条件を満たす関数はこれら以外にも相当多くあることがわかっている．

**補題 2.1.** 関数 $h(t)$ を次のように定義する．
偶数 $k$ に対して，$h(t)=\lfloor\frac{t}{k}\rfloor$ と定義する．このとき，h(t) は定義 2.3 の条件を満たす．

**補題 2.2.** 関数 $h(t)$ を次のように定義する．
まず，$h(0)=h(1)=0$ とし，2 以上の整数 $z$ に対して，$h(z)=2^{\lfloor log_2 z\rfloor-1}$ と定義する． このとき，h(t) は定義 2.3 の条件を満たす．

本稿では，チョコレート $CB(f,y,z)$ のグランディ数を求めるために，直和を使う．毒の右側に図 2, 3, 4 のようなチョコレート $CB(f,y,z)$ を，左側には高さ 1 のチョコの列からなるチョコレートを合わせた，直和によってできるチョコレートゲームを考える．こうすると，左側の高さ 1 のチョコレートを垂直に切る最大回数を $x$ で表し，チョコレート $CB(f,y,z)$ において，水平方向に切る最大回数である $y$ と垂直方向に切る最大回数である $z$ を合わせて，チョコレートの状態を $\{x,y,z\}$ で表すことができる．
このようにしてできた直和のチョコレートゲームにおいて，$\mathcal{P}$-position となるのは，$x \oplus y \oplus z = 0$ であることが証明される．そして，そのことによって，チョコレート $CB(f,y,z)$ のグランディ数は，$x = y \oplus z$ となる．

**定義 2.4.** $A_k = \{\{x,y,z\}; x,y,z \in Z_{\geq 0}, y \leq h(z)$ かつ $x \oplus y \oplus z = 0\}$, $B_k = \{\{x,y,z\}; x,y,z \in Z_{\geq 0}, y \leq h(z)$ かつ $x \oplus y \oplus z \neq 0\}$ と決める．

**定理 2.1.** $A_k$ と $B_k$ を定義 2.4 で定義された集合とする．このとき，$CB(h,y,z)$ を右側に置いて，左側には高さ 1 のチョコレートを置くことでできる直和チョコレートを考える．このとき $A_k$ はそのチョコレートの $\mathcal{P}$-position の集合であり，$B_k$ は $\mathcal{N}$-position の集合である．

**定理 2.2.** $h$ を定義 2.3 で決められた関数とする．このとき，$CB(h,y,z)$ のグランディ数は $y \oplus z$ である．

**証明.** 定理 2.1 によって，直和チョコレートゲームの状態 $\{x,y,z\}$ が $\mathcal{P}$-position となるのは $x \oplus y \oplus z = 0$ となる場合である．したがって， $CB(h,y,z)$ のグランディ数は $x = y \oplus z$ となる． □

**定理 2.3.** $CB(h,y,z)$ のグランディ数が $y \oplus z$ となる必要十分条件は $h$ が定義 2.3 の条件を満たすことである．

**注意 2.1.** 私達のグループによる論文 [2] においては，定

Vol.2015-GI-33 No.15
2015/3/6

義 2.2 において，偶数 $k$ に対して，$f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ としたものを扱っている．補題 2.1 と定理 2.1 と定理 2.2 によって [2] の結果は，今私達が考えている問題の特別な場合となっている．

## 3. 奇数 $k$ に対して $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ であるときの，$CB(f,y,z)$ のグランディ数

ここでは，奇数 $k$ に対して $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ であるときの，$CB(f,y,z)$ のグランディ数に関する定理を与える．まず，このタイプの $CB(f,y,z)$ の例としては，次のようなものがある．

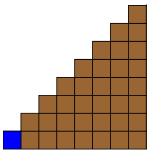

**図 15** $CB(f,7,7)$, $f(t) = t$

$CB(f,y,z)$ のグランディ数を $z = 0,1,2,...,18$ と $0 \leq y \leq z/k$ について計算すると次のようになる．図 16 と図 17 は $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ において，$k = 1$ と $k = 3$ の場合である．

| Z＼Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 1 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 4 | 3 | 5 | 1 | 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 5 | 6 | 4 | 7 | 1 | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 6 | 5 | 7 | 4 | 8 | 1 | 9 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 7 | 8 | 6 | 9 | 4 | 10 | 1 | 11 | | | | | | | | | | | |
| 8 | 8 | 7 | 9 | 6 | 10 | 4 | 11 | 1 | 12 | | | | | | | | | | |
| 9 | 9 | 10 | 8 | 11 | 7 | 12 | 4 | 13 | 1 | 14 | | | | | | | | | |
| 10 | 10 | 9 | 11 | 8 | 12 | 7 | 13 | 4 | 14 | 1 | 15 | | | | | | | | |
| 11 | 11 | 12 | 10 | 13 | 9 | 14 | 7 | 15 | 4 | 16 | 1 | 17 | | | | | | | |
| 12 | 12 | 11 | 13 | 10 | 14 | 9 | 15 | 7 | 16 | 4 | 17 | 1 | 18 | | | | | | |
| 13 | 13 | 14 | 12 | 15 | 11 | 16 | 10 | 17 | 7 | 18 | 4 | 19 | 1 | 20 | | | | | |
| 14 | 14 | 13 | 15 | 12 | 16 | 11 | 17 | 10 | 18 | 7 | 19 | 4 | 20 | 1 | 21 | | | | |
| 15 | 15 | 16 | 14 | 17 | 13 | 18 | 12 | 19 | 10 | 20 | 7 | 21 | 4 | 22 | 1 | 23 | | | |
| 16 | 16 | 15 | 17 | 14 | 18 | 13 | 19 | 12 | 20 | 10 | 21 | 7 | 22 | 4 | 23 | 1 | 24 | | |
| 17 | 17 | 18 | 16 | 19 | 15 | 20 | 14 | 21 | 13 | 22 | 10 | 23 | 7 | 24 | 4 | 25 | 1 | 26 | |
| 18 | 18 | 17 | 19 | 16 | 20 | 15 | 21 | 14 | 22 | 13 | 23 | 10 | 24 | 7 | 25 | 4 | 26 | 1 | 27 |

**図 16** $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ で $k = 1$ のときのグランディ数の表

| Z＼Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | |
| 3 | 3 | 4 | | | | | |
| 4 | 4 | 3 | | | | | |
| 5 | 5 | 6 | | | | | |
| 6 | 6 | 5 | 7 | | | | |
| 7 | 7 | 8 | 5 | | | | |
| 8 | 8 | 7 | 9 | | | | |
| 9 | 9 | 10 | 8 | 11 | | | |
| 10 | 10 | 9 | 11 | 8 | | | |
| 11 | 11 | 12 | 10 | 13 | | | |
| 12 | 12 | 11 | 13 | 10 | 14 | | |
| 13 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 | | |
| 14 | 14 | 13 | 15 | 12 | 16 | | |
| 15 | 15 | 16 | 14 | 17 | 12 | 18 | |
| 16 | 16 | 15 | 17 | 14 | 18 | 12 | |
| 17 | 17 | 18 | 16 | 19 | 15 | 20 | |
| 18 | 18 | 17 | 19 | 16 | 20 | 15 | 21 |

**図 17** $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ で $k = 3$ のときのグランディ数の表

図 16 と図 17 が次の公式を満たしていることはすぐに確かめることができる．なおこの公式は任意の奇数 $k$ に対して，$f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ とするときの，$CB(f,y,z)$ のグランディ数を与える．

**定理 3.1.** 図 16 や図 17 にあるようなチョコレート $CB(f,y,z)$ のグランディ数 $G(y,z)$ は次のような公式を満たす．

$$G(2p, 2q) = p + 2q$$

$$G(2p+1, 2q+1) = p + 2q + 2$$

$$G(2p+1, 2q) = 2q - p - 1 \ (if \ (2p+1)(k+1) < 2q)$$

$$= 2q - 2p - 1 + \lfloor \frac{-2p + 2q - 1}{2k} \rfloor \ (if \ (2p+1)(k+1) \geq 2q)$$

$$G(2p, 2q+1) = 2q - p + 1 \ (if \ 2p(k+1) \leq 2q+1)$$

$$= 2q - 2p + 1 + \lfloor \frac{-2p + 2q + 1}{2k} \rfloor \ (if \ 2p(k+1) > 2q+1)$$

**注意 3.1.** この定理を見れば，$CB(f,y,z)$ のグランディ数が $y \oplus z$ でないことがわかる．実際には $CB(f,y,z)$ のグランディ数が $y \oplus z$ となるようなチョコレートは，特別なものであって，そのような特別なチョコレートになるための必要十分条件として与えたのが，定義 2.3 である．

## 4. チョコレートゲームの実装

チョコレートゲームは，数学的な対象というよりも，もともとは実際にプレーするゲームとして考えられている．モバイル機器におけるゲームとして実装されている例としては，図 18(新チョコレートゲーム), 図 19(Bitter Chocolate Games 4) がある．他にも iOS デバイス (iPhone/iPod Touch,iPad) 上で動くアプリケーションを多数作成しており，以下の url からダウンロード可能となっている．もしくは，AppStore で「Masanori Fukui」と検索すると表示される．

・ビターチョコレートゲーム 1 〜Bitter Chocolate Games 1〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/bitachokoretogemu1-bitter/id495880660?mt=8`

・ビターチョコレートゲーム 2 〜Bitter Chocolate Games 2〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/bitachokoretogemu2-bitter/id502476677?mt=8`

・ビターチョコレートゲーム 3 〜Bitter Chocolate Games 3〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/bitachokoretogemu3-bitter/id504281945?mt=8`

・新チョコレートゲーム 〜New Chocolate Games〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/xinchokoretogemu-new-chocolate/id769400911?mt=8`

・チョコレートゲーム 〜A Bitter Chocolate Problem〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/`

`chokoretogemu-bitter-chocolate/id793748707?mt=8`
・奪取！チョコレートゲーム 〜Based On Partially Chocolate Problem〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/duo-qu!chokoretogemu-based/id843124159?mt=8`
・ビターチョコレートゲーム 4 〜Bitter Chocolate Games 4〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/bitachokoretogemu4-bitter/id871585011?mt=8`
・奪取！チョコレートゲーム 2 〜Based On Partially Chocolate Problem〜,
`https://itunes.apple.com/jp/app/duo-qu!chokoretogemu2-based/id883490727?mt=8`

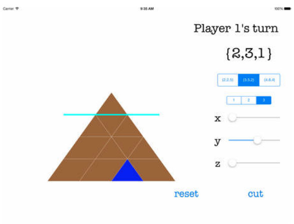


**図 18** New Chocolate Games

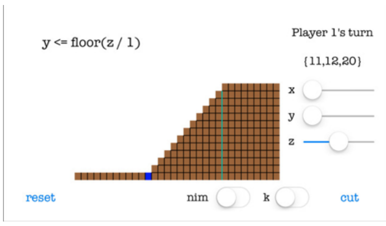


**図 19** Bitter Chocolate Games4

## 参考文献


[1] S. Nakamura and R. Miyadera, Grundy Numbers of Impartial Chocolate Bar Games, to appear.

[2] S. Nakamura and R. Miyadera, Impartial Chocolate Bar Games, to appear.

[3] A.C.Robin, A poisoned chocolate problem, Problem corner, The Mathematical Gazette Vol. 73, No. 466 (Dec., 1989), pp. 341-343. An Answer for the above problem is in Vol. 74, No. 468, June 1990, pp. 171-173.

[4] D.Zeilberger, Three-Rowed CHOMP, Adv. Applied Math Vol. 26 (2001), pp. 168-179.

[5] M. H. Albert 組み合せゲーム理論入門-勝利の方程式-, 共立出版, 2011. (M. H. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, Lessons In Play, A K Peters.)

[6] 佐藤文広, 石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.

[7] M.Naito, T.Inoue, R.Miyadera, Discrete Mathematics and Computer Algebra System, The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009, COE Lecture Note Vol.22,Kyushu University. `http://gcoe-mi.jp/english/publish_list/pub_inner/id:2/cid:10`

[8] 宮寺 良平 , 井上 泰志 , 小笠 航 , 中村 駿佑, 石取りゲームの変種であるチョコレートゲーム, 情報処理学会論文誌, 53(6) pp. 1582-1591.

[9] R. Miyadera, S. Nakamura and R. Hanafusa, New Chocolate Games -Variants of the Game of Nim-, Proceeding of Annual International Conference on Computational Mathematics, Computational Geometry Statistics,pp.122-pp.128, 2012.

[10] R. Miyadera, S. Nakamura, Y. Okada, R. Hanafusa, and T. Ishikawa,Chocolate Games -How High School Students Discovered New Formulas Using Mathematica-, Mathematica Journal, Volume 15, 2013. `http://www.mathematica-journal.com/volume/v15/`