情報処理学会論文誌 Vol.56 No.1 362–368 (Jan. 2015)

テクニカルノート

議員定数配分—Webster方式の不偏性について

一森 哲男[1,a)]

受付日 2014年7月31日, 採録日 2014年10月8日

概要：このノートでは議員定数配分方式の偏りを論じる．公正な配分方式としてWebster方式とHill方式が有名であるが，どちらが偏りのない方式であるのかは長年にわたり論争されてきた．その中で，Balinskiらの理論によれば，Webster方式には完全に偏りがない．それに対し，本ノートでは，偏りをより厳密に測ることにより，同方式が人口の少ない州に少し有利であることを明らかにする．また，シミュレーションによりその結論の正当性を確認する．

キーワード：議員定数配分，偏り

On the Unbiasedness of Webster's Method

Tetsuo Ichimori[1,a)]

Received: July 31, 2014, Accepted: October 8, 2014

Abstract: This note treats the apportionment problem. Webster's and Hill's methods are believed to be fair, but it has been open for a long time which method is unbiased. Although Balinski and Young claim that the Webster method is perfectly unbiased, we discover here that the method has a small bias in favor of small states. In addition we reinforce the discovery by a computer simulation.

Keywords: apportionment, bias

1. はじめに

人口に比例して議席を配分する問題を議員定数配分問題という．この問題はアメリカ合衆国憲法に規定された問題であり，200年以上の未解決問題として有名である．もちろん，この問題はアメリカ特有のものではなく，どの国にも存在する普遍的な問題であり，わが国でも「一票の価値」の問題としてメディアにしばしば取り上げられている．

最近，情報理論を用いて，この問題の解決が図られている [9], [11], [14]．例をあげれば，妥当な配分方式のクラスである緩和除数方式 [8], [15] による議席配分結果はアルファ・ダイバージェンス [2], [3] を最小にすることにより得られる [11]．この結果は有益であるものの，アルファ・ダイバージェンスの持つパラメータ α の値を唯一に決定できなければ，配分方式を特定できず，問題解決とはならない．

従来，議員定数配分問題は配分方式の偏りを重視してきた．アメリカで最初に使用されたJefferson方式は人口の多い州に非常に有利で，人口の少ない州には不利であった．ちなみに，この方式はわが国ではD'Hondt方式という名前で知られており，衆議院と参議院の比例代表制での議席配分で使用されている．この場合は，政党を州と読み替え，政党の得票を州の人口と読み替えれば同じ議員定数配分問題になる．人口の多い州を大州，少ない州を小州といえば，Jefferson方式は大州に大きな偏りを有している．

20世紀に入ってからは，大州・小州への偏りが中立として，Webster方式とHill方式が注目を浴びた．Willcoxは両方式を検討し，Webster方式は大州と小州を公正に扱っているが，Hill方式は小州に有利であるという見解を表明した [19]．それに対し，Huntingtonは歴史上の5方式と呼ばれる配分方式（Adams方式，Dean方式，Hill方式，Webster方式，Jefferson方式）を理論的に導き，その中で大州・小州への偏りが中立となるのはHill方式であると反論した [5], [6]．議会を巻き込んだ両者の対立は数十年間続

[1] 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan
[a)] ichimori@is.oit.ac.jp

き，議会は全米科学アカデミーに両方式の優劣の判定を 2 度依頼した．1929 年と 1948 年の 2 回の結果は，どちらも，Hill 方式の偏りの中立性が支持された．それにもかかわらず，Balinski らは 1980 年ごろから，Hill 方式は小州に有利であり，Webster 方式は完全に偏りがないと主張し始めた．

Willcox による Webster 方式の偏りの中立性は，過去の実際のデータに基づく膨大な量の，機械式計算機の計算結果であるが，理論的なものではない．一方の Huntington によれば，Webster 方式は「明らかに」大州に有利であるが，その根拠は彼が示したいくつかの数値例に基づいているだけである．それらに対し，Balinski らによる Webster 方式の偏りは理論的導出であり，かつ，実データに基づく計算結果でもある [1]．

本ノートの目的は，Balinski らと同じ仮定の下で，Webster 方式の偏りを求めることである．ただし，偏りの測り方は彼らの方法と少し異なり，より厳密なものを使用する．その結果，Webster 方式の偏りは完全にはゼロとならず，少し小州に有利となる．また，実データに基づくシミュレーションにより，そのことの正当性を裏付ける．

2. 除数方式と緩和除数方式

最初に，議員定数配分問題に関連する記号を説明する．$s \geq 2$ を州の数，$S = \{1, \ldots, s\}$ を州の集合，$h \geq 1$ を議員定数とする．各 $i \in S$ に対して，$p_i \geq 1$ を州 i の人口，$q_i > 0$ を州 i の「取り分」とする．これは州 i の受け取るべき議席の理想値（実数値）$q_i = hp_i/\pi > 0$ のことである．ここで，$\pi = \sum_{i \in S} p_i$ は総人口である．当然，$\sum_{i \in S} q_i = h$ が成り立つ．また，記号 $\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathbb{Z}_0$ を非負の整数の集合，$\mathbb{Z}_+$ を正の整数の集合とする．

次に，Balinski らの定義した除数方式を簡単に説明する．関数 $d(k)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）を定義する．これは k に関して狭義増加で，$k \leq d(k) \leq k+1$ を満たす．さらに，$d(n) = n$ かつ $d(m) = m+1$ となる整数のペア $n \in \mathbb{Z}_+$，$m \in \mathbb{Z}_0$ が存在しない．この関数 $d(k)$ を丸め関数と呼び，これを利用する配分方式を除数方式（M_d 方式と書く）という．

正の実数 x を丸め関数 $d(k)$ を用いて整数に丸めるために，記号 $[x]_d$ を定義する．これは，$d(k-1) < x < d(k)$ となる $k \in \mathbb{Z}_0$ が存在するとき $[x]_d = k$ とし，$x = d(k)$ となる $k \in \mathbb{Z}_0$ が存在するとき $[x]_d = k$ または $k+1$ と自由度を持たせる．便宜的に，$d(-1) = 0$ とする．さらに，各 $i \in S$ に対して，$a_i \in \mathbb{Z}_0$ を州 i に配分される議席数とする．このとき，議員定数 h が州の数 s 以上ならば，$\sum_{i \in S} [p_i/\lambda]_d = h$ を満たす除数 $\lambda = \lambda_d > 0$ が存在し，$a_i = [p_i/\lambda_d]_d$ となる議席配分 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ が定まる．$\boldsymbol{a}$ を M_d 方式による議員定数 h の配分，あるいは，単に M_d 配分と呼ぶ．

M_d 方式の丸め関数 $d(k)$ を具体的に定めると，その配分方式は特定の名前で呼ばれることが多い．**表 1** に歴史上の 5 方式の名前とその丸め関数を与える．丸め関数 $d(k)$ は，

表 1　歴史上の 5 方式およびそれらの丸め関数と用いる平均

Table 1　Five historical apportionment methods and their rounding functions and means between k and $k+1$.

配分方式	丸め関数 $d(k)$	平均
Adams	k	
Dean	$k(k+1)/(k+1/2)$	調和
Hill	$\sqrt{k(k+1)}$	幾何
Webster	$k+1/2$	算術
Jefferson	$k+1$	

連続する 2 整数 k と $k+1$ の平均を用いることがよくある．Dean 方式は調和平均，Hill 方式は幾何平均，Webster 方式は算術平均を利用している．

パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $d_\theta(k)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）を以下のように定義する．$k \in \mathbb{Z}_+$ のとき，

$$d_\theta(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}} \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}, & \theta = 1 \\ \dfrac{1}{\log \frac{k+1}{k}}, & \theta = 0 \\ \left(\dfrac{(k+1)^\theta - k^\theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}}, & \theta \neq 1, 0 \end{cases} \tag{1}$$

とする．この関数 $d_\theta(k)$ は正の整数 k と $k+1$ のパラメータ θ の Stolarsky 平均といわれ，θ に関して連続かつ狭義増加で，$k < d_\theta(k) < k+1$ がなりたち，$\theta \to -\infty$ のとき $d_\theta(k) \to k$，および，$\theta \to +\infty$ のとき $d_\theta(k) \to k+1$ となる [16]．さらに，$k = 0$ のとき，

$$d_\theta(0) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37, & \theta = 1 \\ 0, & \theta \leq 0 \\ \left(\dfrac{1}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta - 1}}, & \text{上記以外} \end{cases} \tag{2}$$

とする．このとき，$d_\theta(0)$ は $\theta > 0$ に関して連続かつ狭義増加で，$0 < d_\theta(0) < 1$ $(\theta > 0)$ がなりたち，$\theta \to +\infty$ のとき $d_\theta(0) \to 1$ となることが確認できる．

関数 $d_\theta(k)$ を丸め関数として利用する配分方式をパラメータ θ を持つ緩和除数方式という．パラメータ θ にさまざまな値を代入すると，緩和除数方式は特別な名前で呼ばれる．具体的には，$\theta = 0$ のとき TS 方式 [17]，$\theta = 1$ のとき Theil 方式 [18]，$\theta = 3$ のとき “1/3” 方式と呼ばれる [7]．$\theta = -1$ では $d_\theta(k) = \sqrt{k(k+1)}$ となるので Hill 方式，$\theta = 2$ では $d_\theta(k) = k+1/2$ となるので Webster 方式が導かれる．$\theta \to -\infty$ ならば $d_\theta(k) \to k$ となるので，このとき Adams 方式に漸近する．$\theta \to +\infty$ ならば $d_\theta(k) \to k+1$ となるので，このとき Jefferson 方式に漸近する．さらに，$\theta = -4$ では $d_\theta(k) \approx k(k+1)/(k+1/2)$ となるので Dean 方式にほぼ一致する [12]．これらの結果を**表 2** にまとめる．

3. Balinski らによる偏り

配分方式として除数方式を考えるとき，州の数を 2 に

表 2 パラメータ θ の値とそれに対応する配分方式
Table 2 Values of parameter θ and their corresponding apportionment methods.

パラメータ	配分方式
$-\infty$	Adams
-4	Dean
-1	Hill
0	TS
1	Theil
2	Webster
3	“1/3”
$+\infty$	Jefferson

限定することが多い．その理由は，除数方式が一様性という性質を持つためである．一様性に関しては，文献 [1] に詳しく述べられているが，この性質により，ある数の議席を 2 州間で分け合う方法は他の州の人口から独立に決定される．また，除数方式による配分 $\boldsymbol{a}$ の定め方より，任意の実数 $\mu > 0$ を用いて，各州 i の人口 p_i を μp_i に変更しても配分結果は変化しない．さらに，記号 $[x]_d$ の定義から，人口を少し変化させても配分結果は変化しない．以上のことから，$a_1 > a_2 > 0$ となる 2 つの州 $i = 1, 2$ に対して，Balinski らは州 i の人口を確率変数 X_i とし，X_i は区間 $(d(a_i - 1), d(a_i))$ 上の一様乱数に従うと仮定した．このとき，X_i の実現値を x_i としたとき，$a_i = [x_i]_d$ となることに注意する．彼らは，小州 2 が有利となる，すなわち，$a_2/X_2 > a_1/X_1$ の関係が成立する確率を考えた．

いま，$m = a_1$ と $n = a_2$ とおいて，4 点 $\mathrm{A} = (d(m-1), d(n-1))$，$\mathrm{B} = (d(m), d(n-1))$，$\mathrm{C} = (d(m), d(n))$，$\mathrm{D} = (d(m-1), d(n))$ を持つ，x_1x_2 平面上の四角形 ABCD を考える．説明を簡単にするため，点 $\mathrm{H} = (m, n)$ は四角形 ABCD の内点とする．$m > n > 0$ なので，原点 O と H を結ぶ直線は辺 AD と辺 BC に交わる．その交点をそれぞれ E と F とする（**図 1** 参照）．このとき，小州 2 が有利となる確率は

$$\frac{\text{四角形 ABFE の面積}}{\text{四角形 ABCD の面積}}$$

に等しい．Webster 方式では上記の面積比が明らかに 1/2 となることから，同方式の小州有利となる確率は 0.5 となる．このように，大州と小州に偏りのない Webster 方式は歴史上の 5 方式の中で，あるいは，緩和除数方式の中で唯一の配分方式となる．

Balinski らは上記の内容の正当性を裏付けるため，次の偏りの尺度を提案した．M_d 配分 $(a_1, \ldots, a_s)$ が与えられたとして，2 つの集合

$$F = \{(i, j) \mid 0 < a_i < a_j,\ a_i/p_i > a_j/p_j \quad i, j \in S\}$$

および

$$A = \{(i, j) \mid 0 < a_i < a_j \quad i, j \in S\}$$

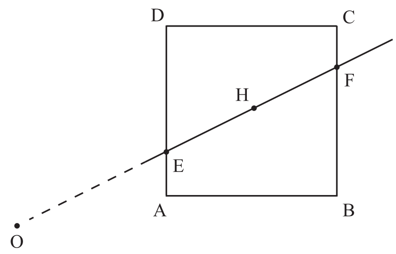

図 1 四角形 ABCD と四角形 ABFE
Fig. 1 Quadrilaterals ABCD and ABFE.

表 3 偏倚率
Table 3 Bias ratio.

配分方式	偏倚率 (%)
Adams	79.723
Dean	59.727
Hill	57.287
TS	56.302
Theil	52.507
Webster	49.997
“1/3”	47.829
Jefferson	18.507

を定義する．$|A| \neq 0$ のとき，比率 $|F|/|A|$ は偏倚率と呼ばれる．除数方式では $a_i < a_j$ は $p_i \leq p_j$ を意味するので，偏倚率 $|F|/|A|$ は小州有利の割合を表していると考えられる．彼らは 1790 年から 1970 年までの全 19 回の国勢調査から作られた 19 個の問題に対し，偏倚率を調べ，Webster 方式の偏倚率が 51.5%であることを示した．

彼らの主張は，2010 年度の国勢調査の人口および各配分結果をもとに，シミュレーションにより確認することもできる．シミュレーションでは人口を区間 $(d(a_i - 1), d(a_i))$ 上の一様乱数で定め，計 100 万個の問題を作成し，各配分方式の偏倚率の平均値を求めた．これらの結果を**表 3** にまとめる．予想どおり，Webster 方式の偏倚率は $49.997 \approx 50\%$ になっている．

4. より厳密な偏り

Balinski らは 2 州間の議席配分問題において，小州が有利となる割合を求めているが，彼らは不等式 $a_2/x_2 > a_1/x_1$ の表す大小関係のみに注目しており，その差 $a_2/x_2 - a_1/x_1$ の大きさは無視している．有利になるとしても，どの程度有利なのかを考慮に入れた方がより正確な偏りが求まるはずである．実のところ，偏りは取り分と配分議席数の差異で測るべきであることは，Balinski ら [1] および Young [20] を含め，一般に広く認められている．そこで，前章の Balinski らのモデルを用いて，大州 1 が取り分の値からどの程度多く（少なく）議席を獲得しているかを計算してみる．以前と同じ仮定を用いて，任意の 2 整数 $m > n > 0$ に対して，州 1 の人口 x_1 は不等式 $d(m-1) < x_1 < d(m)$ を満たし，州 2 の人口 x_2 は不等式 $d(n-1) < x_2 < d(n)$ を満たす．

表 4 2010 年度人口に対する議席配分結果
Table 4 M_d apportionments for the 2010 Census.

州	取り分	A	D	H	W	J
CA	52.538	50	52	53	53	55
TX	35.551	34	36	36	36	37
NY	27.324	26	27	27	27	28
FL	26.592	26	27	27	27	28
IL	18.099	18	18	18	18	19
PA	17.917	17	18	18	18	18
OH	16.276	16	16	16	16	17
MI	13.945	14	14	14	14	14
GA	13.686	13	14	14	14	14
NC	13.458	13	13	13	14	14
NJ	12.392	12	12	12	12	13
VA	11.309	11	11	11	11	11
WA	9.502	10	10	10	10	10
MA	9.229	9	9	9	9	9
IN	9.147	9	9	9	9	9
AZ	9.022	9	9	9	9	9
TN	8.970	9	9	9	9	9
MO	8.458	9	8	8	8	8
MD	8.146	8	8	8	8	8
WI	8.017	8	8	8	8	8
MN	7.478	8	8	8	8	7
CO	7.098	7	7	7	7	7
AL	6.757	7	7	7	7	7
SC	6.537	7	7	7	7	6
LA	6.407	7	6	6	6	6
KY	6.121	6	6	6	6	6
OR	5.415	6	5	5	5	5
OK	5.297	6	5	5	5	5
CT	5.039	5	5	5	5	5
IA	4.296	5	4	4	4	4
MS	4.190	4	4	4	4	4
AR	4.117	4	4	4	4	4
KS	4.029	4	4	4	4	4
UT	3.898	4	4	4	4	4
NV	3.812	4	4	4	4	4
NM	2.909	3	3	3	3	3
WV	2.617	3	3	3	3	2
NE	2.577	3	3	3	3	2
ID	2.214	3	2	2	2	2
HI	1.923	2	2	2	2	2
ME	1.876	2	2	2	2	1
NH	1.859	2	2	2	2	1
RI	1.485	2	2	2	1	1
MT	1.399	2	2	1	1	1
DE	1.267	2	1	1	1	1
SD	1.153	2	1	1	1	1
AK	1.015	1	1	1	1	1
ND	0.951	1	1	1	1	1
VT	0.887	1	1	1	1	0
WY	0.800	1	1	1	1	0
総計	435.000	435	435	435	435	435

表 5 州の部分集合
Table 5 Subsets of the set of states.

部分集合	定義
上位 5 州	$\{1,\ldots,5\}$
上位 10 州	$\{1,\ldots,10\}$
下位 10 州	$\{41,\ldots,50\}$
下位 20 州	$\{31,\ldots,50\}$

州 1 と 2 の配分議席数はそれぞれ $a_1 = m$ と $a_2 = n$ となる．州 1 の取り分 q_1 は

$$q_1 = (m+n) \times \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

となり，四角形 ABCD 全体での平均は

$$\overline{q_1} = \frac{m+n}{R} \int_{d(m-1)}^{d(m)} \left(\int_{d(n-1)}^{d(n)} \frac{x_1}{x_1+x_2}\, dx_2 \right) dx_1$$

となる．ここで，R は四角形 ABCD の面積，すなわち，$R = (d(m) - d(m-1))(d(n) - d(n-1))$ である．よって，$m - \overline{q_1}$ の値が正であれば，大州 1 は平均的に取り分の値より多く議席を獲得し，値が負であれば取り分の値より少なく議席を獲得する．いい換えれば，任意の整数 $m > n > 0$ に対して，不等式

$$\int_{d(m-1)}^{d(m)} \left(\int_{d(n-1)}^{d(n)} \frac{x_1}{x_1+x_2}\, dx_2 \right) dx_1 < \frac{m}{m+n} R$$

が成り立てば M_d 方式は大州有利で，不等号の向きが反対であれば小州有利となる．このことから，$d(k) = k + 1/2$ となる Webster 方式は小州に有利となることが示せる．詳細は付録に与えている．

さらに，このことをシミュレーションにより確認する．データとして 2010 年度人口を用いる．人口の多い順に 50 州を並べ，最大から i 番目の州を i とする．だから，州 1 は California 州となる．表 2 に示された 8 方式で 435 議席を配分した結果を**表 4** にまとめる．TS 方式および Theil 方式の結果は Hill 方式の配分に等しく，“1/3” 方式の結果は Webster 方式の配分に等しい．

表 5 に示したが，偏りを調べるため 4 つの部分集合（上位 5 州，上位 10 州，下位 10 州，下位 20 州）を定義する．上位 5 州の人口の和は全体の 36.8%であり，上位 10 州の人口の和は 54.1%を占める．下位 10 州の人口の和は非常に小さく全体の 2.9%でしかない．このため，人口の和がさらに小さくなる下位 5 州は定義しなかった．代わりとして，下位 20 州を定義したが，その人口の和は全体の 10.3%を占める．

上記の 4 集合に対応する 4 つの偏りの指標：

(1) $\sum_{i=1}^{5} (a_i - q_i)/5$,
(2) $\sum_{i=1}^{10} (a_i - q_i)/10$,
(3) $\sum_{i=41}^{50} (a_i - q_i)/10$,
(4) $\sum_{i=31}^{50} (a_i - q_i)/20$,

表 6 取り分との差異（1 州あたりの議席数）
Table 6 Mean disparities between $\sum a_i$ and $\sum q_i$.

配分方式	上位 5 州	上位 10 州
Adams	−1.3478	−0.8538
Dean	−0.3385	−0.2174
Hill	−0.2608	−0.1633
TS	−0.2288	−0.1409
Theil	−0.0998	−0.0475
Webster	−0.0338	−0.0003
“1/3”	0.0198	0.0380
Jefferson	1.3419	0.8530

配分方式	下位 10 州	下位 20 州
Adams	0.4728	0.3781
Dean	0.3039	0.1659
Hill	0.2702	0.1368
TS	0.2538	0.1234
Theil	0.1112	0.0518
Webster	0.0402	0.0180
“1/3”	−0.0047	−0.0085
Jefferson	−0.4292	−0.3499

を各配分方式に対して考える．以前と同じように，人口 x_i を区間 $(d(a_i-1), d(a_i))$ 上でランダムに決定し，100 万個の問題を作成した．それらの問題に対して，上記 4 指標の値の平均値を調べた．結果を**表 6** にまとめる．

すべてにおいて Webster 方式がわずかに小州有利となっていることが確認できる．しかも，上位 10 州を除き，Webster 方式の偏りが 8 方式の中で最小というわけでもない．実際，他の 3 つの指標で “1/3” 方式の偏りが最小となっている．

5. おわりに

Balinski らによる Webster 方式の偏りに関して考察した．彼らと同じ偏りのモデルを用いて，より厳密に Webster 方式の偏りを調べた．その結果，同方式は彼らの主張するような，完全な中立性は認められなかった．また，実際の 2010 年度の人口と議席配分のデータをもとに，シミュレーションを行った結果でも，このことが確認できた．しかしながら，Webster 方式を含め，配分方式の偏りに関してはさまざまな研究 [1], [4], [6], [10], [13], [19] があるものの，不明な点が多く，さらなる研究が必要である．

参考文献

[1] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, Yale University Press, New Haven (1982). 越山 康（監訳），一森哲男（訳），公正な代表制，千倉書房，東京 (1987). 2nd ed., Brookings Institution Press, Washington D.C. (2001).
[2] Chernoff, H.: A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on a Sum of Observations, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.23, No.4, pp.493–507 (1952).
[3] Cichocki, A. and Amari, S.: Families of Alpha- Beta- and Gamma-Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities, *Entropy*, Vol.12, pp.1532–1568 (2010).
[4] Ernst, L.R.: Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).
[5] Huntington, E.V.: The Mathematical Theory of the Apportionment of Representatives, *Proc. National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol.7, pp.123–127 (1921).
[6] Huntington, E.V.: The Apportionment of Representatives in Congress, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.30, No.1, pp.85–110 (1928).
[7] Ichimori, T.: New Apportionment Methods and Their Quota Property, *JSIAM Letters*, Vol.2, pp.33–36 (2010).
[8] Ichimori, T.: Relaxed Divisor Methods and Their Seat Biases, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.1, pp.63–72 (2012),
[9] 一森哲男：レニーのエントロピーを最大にする議席配分方式について，日本応用数理学会論文誌，Vol.22, No.3, pp.81–96 (2012).
[10] Ichimori, T.: A Note on Relaxed Divisor Methods, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, No.4, pp.225–234 (2012).
[11] 一森哲男：分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について，情報処理学会論文誌，Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).
[12] 一森哲男：緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol.56, pp.1–14 (2013).
[13] 一森哲男：緩和除数方式の偏りについて，日本応用数理学会論文誌，Vol.23, No.4, pp.601–617 (2013).
[14] 一森哲男：ダイバージェンスが定める議席配分方式，情報処理学会論文誌，Vol.55, No.5, pp.1568–1572 (2014).
[15] 薩摩順吉，大石進一，杉原正顯（編）：応用数理ハンドブック，朝倉書店 (2013).
[16] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, *Mathematics Magazine*, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).
[17] Theil, H. and Schrage, L.: The Apportionment Problem and the European Parliament, *European Economic Reviews*, Vol.9, No.3, pp.247–263 (1977).
[18] Theil, H.: The Desired Political Entropy, *American Political Science Review*, Vol.63, No.2, pp.521–525 (1969).
[19] Willcox, W.F.: The Apportionment of Representatives, *American Economic Review*, Vol.6, No.1, pp.3–16 (1916).
[20] Young, H.P.: *Equity*, Princeton University Press, Princeton (1994).

付 録

A.1 Webster 方式の小州有利性の証明

ここでは，Webster 方式が小州に有利であることを明らかにする．丸め関数は $d(k) = k + 1/2$ であることから，四角形 ABCD の面積は $R = 1$ となる．よって，任意の整数 $m > n > 0$ に対して，不等式

$$\int_{m-1/2}^{m+1/2} \Big(\int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{x}{x+y}\, dy \Big) dx > \frac{m}{m+n} \qquad \text{(A.1)}$$

が成り立つことを示せば，Webster 方式は小州に有利とい

える．左辺の内側の積分は，

$$\int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{x}{x+y}\,dy = [x\log(x+y)]_{n-1/2}^{n+1/2}$$
$$= x\log(x+n+1/2) - x\log(x+n-1/2)$$

と変形できるので，式 (A.1) の左辺は 2 つの積分：

$$\int_{m-1/2}^{m+1/2} x\log(x+n+1/2)\,dx \tag{A.2}$$

および

$$\int_{m-1/2}^{m+1/2} x\log(x+n-1/2)\,dx \tag{A.3}$$

の差に等しい．最初に，$a = n+1/2$ とおき，式 (A.2) の積分を計算すると

$$\int_{m-1/2}^{m+1/2} x\log(x+a)\,dx$$
$$= \left[\frac{a}{2}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2-a^2}{2}\log(x+a)\right]_{m-1/2}^{m+1/2}$$
$$= \frac{a}{2} - \frac{m}{2} + \frac{m-n}{2}(m+n+1)\log(m+n+1)$$
$$- \frac{m-n-1}{2}(m+n)\log(m+n)$$

が得られる．次に，$b = n-1/2$ とおき，式 (A.3) の積分を計算すると

$$\int_{m-1/2}^{m+1/2} x\log(x+b)\,dx$$
$$= \left[\frac{b}{2}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2-b^2}{2}\log(x+b)\right]_{m-1/2}^{m+1/2}$$
$$= \frac{b}{2} - \frac{m}{2} + \frac{m-n+1}{2}(m+n)\log(m+n)$$
$$- \frac{m-n}{2}(m+n-1)\log(m+n-1)$$

が得られる．式 (A.2) と式 (A.3) の差を求めると，すなわち，式 (A.1) の左辺は

$$\frac{1}{2} + \frac{m-n}{2}\Big((m+n+1)\log(m+n+1) \tag{A.4}$$
$$+ (m+n-1)\log(m+n-1) - 2(m+n)\log(m+n)\Big)$$

と書ける．式 (A.1) の右辺と式 (A.4) に対して，1/2 を減じ，$2/(m-n) > 0$ を乗じると，式 (A.1) の右辺は

$$\left(\frac{m}{m+n} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{m-n} = \frac{1}{m+n}$$

となり，式 (A.4) は

$$(m+n+1)\log(m+n+1)$$
$$+ (m+n-1)\log(m+n-1)$$
$$- 2(m+n)\log(m+n)$$

となる．さらに，$k = m+n > 2$ とおくと，不等式 (A.1) は

$$(k+1)\log(k+1) + (k-1)\log(k-1) - 2k\log k > 1/k \tag{A.5}$$

と書き換えられる．

次に，定義域を $x > 1$ とする関数

$$f(x) = (x+1)\log(x+1) + (x-1)\log(x-1) - 2x\log x - 1/x$$

を考える．これを微分すると

$$f'(x) = \log(x+1) + \log(x-1) - 2\log x + 1/x^2$$
$$= \log(1-1/x^2) + 1/x^2$$

となるが，$y = 1/x^2$ とおけば，y の値は $0 < y < 1$ となり，$\log(1-1/x^2) + 1/x^2$ は $\log(1-y) + y$ と書ける．$\lim_{y\to 0}(\log(1-y)+y) = 0$ および $(\log(1-y)+y)' = -y/(1-y) < 0$ より，$\log(1-y)+y < 0$ $(0 < y < 1)$，すなわち，$f'(x) < 0$ $(x > 1)$ となる．だから，関数 $f(x)$ は定義域上で狭義減少関数となる．また，$\lim_{x\to 1} f(x) = 2\log 2 - 1 \approx 0.386$，および，以下に示すように $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ であることから $f(x) > 0$（$x > 1$）となり，不等式 (A.5)，すなわち，不等式 (A.1) が成り立つことが分かる．

最後に，正の実数 z と $z+1$ の identric 平均 [16]

$$I(z) = \frac{1}{e}\frac{(z+1)^{(z+1)}}{z^z}$$

を考える．このとき，$z < I(z) < z+1$ が成り立つ．これを利用すると関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \log\frac{I(x)}{I(x-1)} - \frac{1}{x}$$

と書ける．いま，

$$\frac{x}{x} < \frac{I(x)}{I(x-1)} < \frac{x+1}{x-1}$$

が成り立つことから，

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{I(x)}{I(x-1)} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

すなわち，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ が成り立つ．

一森 哲男 （正会員）

昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年より大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．平成 25 年日本応用数理学会論文賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会各会員．