Vol.2015-CVIM-195 No.50
2015/1/23

内点法を用いたADMMによるMRF最適化

原田　剛志[1,a)]　玉木　徹[1,b)]　Bisser Raytchev[1]　金田　和文[1]

概要：本稿では内点法を用いたADMMにMRF最適化を行う手法を提案する．MRF最適化問題を線形計画問題に緩和する場合，変数の数が多くなるという問題がある．そこで，部分問題に分割して解くことで，変数が多くとも内点法を用いて問題を解くことができる．本研究ではMRFに対し内点法を用いたADMMを適用する方法を提案する．

1. はじめに

本稿ではMarkov Random Field (MRF) にADMM[2]を適用する場合に内点法を用いる手法を提案する．MRF最適化には線形計画問題へと緩和するアプローチがある[10]がその場合変数が多くなるという問題が存在する．そこで，問題を分割して解くDual Decomposition (DD) [6], [9]やAlternating Direction Method of Multipliers (ADMM) [1], [5], [8]などの手法が提案されている．ただし，問題の分割の仕方によって収束の性質が異なることが知られている．DDでは最小全域木に分割した場合よりも，ループを含む部分グラフに分割した場合のほうが下界がよりタイトになることが報告されている[6]．一方，ADMMでは部分木に分割した場合が報告されている[1], [5], [8]が，ループを含む部分グラフに適用した例は報告されていない．そこで，本研究では内点法を用いてADMMをMRF最適化に適用する．

2. Markov Random Field

$|v|$ 個のノードからなるノード集合 v とエッジ集合 e からなるグラフ $G=\{v,e\}$ に対するMRFのエネルギー最小化問題は以下のように定式化される．

$$\min_x E(\theta,x) = E_d(x)+E_s(x) \tag{1}$$

$$E_d(x) = \sum_{p\in v}\theta_p(x_p) \tag{2}$$

$$E_s(x) = \sum_{(p,q)\in e}\theta_{pq}(x_p,x_q) \tag{3}$$

ここで E_d はデータ項，E_s は平滑化項である．また，$L=\{0,1,\dots,L_N\}$ は離散ラベル集合，$x_p\in L$ はノード p におけるラベルであり，$\theta_p(x_p)$ はノード p がラベル x_p をとるときのコスト，$\theta_{pq}(x_p,x_q)$ はエッジ (p,q) においてそれぞれノード p,q がそれぞれラベル x_p,x_q をとるときのコストである．上式で定義されるコストを最小にする，ノードへのラベルの割当 $x=\{x_0,x_1,\dots,x_{|v|-1}\}\in L^{|v|}$ を推定することが目的となる．

2.1 MRFの線形計画問題への拡張

MRF問題 (1) を0-1線形計画問題として書き表すと次のようになる．

$$\min_{x\in\chi^{\mathrm{IP}}} E(\theta,x) = \sum_{p\in v,a\in L}\theta_p(a)x_{p;a} + \sum_{(p,q)\in e,\ a,b\in L}\theta_{pq}(a,b)x_{pq;ab} \tag{4}$$

ここで $x_{p;a},x_{pq;ab}$ は以下のような離散01変数である．

$$x_{p;a} = \begin{cases} 1 & x_p=a \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{5}$$

$$x_{pq;ab} = \begin{cases} 1 & x_p=a \ \&\ x_q=b \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{6}$$

また次の χ^{IP} を整数計画問題の実行可能解集合とする．

$$\chi^{\mathrm{IP}} = \left\{ x \left| \begin{array}{l} \sum_{a\in L} x_{pq;ab} = x_{q;b}, \forall(p,q)\in e, b\in L \\ \sum_{b\in L} x_{pq;ab} = x_{p;a}, \forall(p,q)\in e, a\in L \\ \sum_{a\in L} x_{p;a} = 1, \forall p\in v, a\in L \\ x_{p;a}, x_{pq;ab}\in(0,1) \end{array} \right. \right\} \tag{7}$$

この整数計画問題はしばしば線形計画問題に緩和されることが多い．

$$\min_{x\in\chi^{\mathrm{LP}}} E(\theta,x) = \sum_{p\in v,a\in L}\theta_p(a)x_{p;a} + \sum_{(p,q)\in e,\ a,b\in L}\theta_{pq}(a,b)x_{pq;ab} \tag{8}$$

1　広島大学
a)　haradat@eml.hiroshima-u.ac.jp
b)　tamaki@hiroshima-u.ac.jp

また次の $\chi^{\rm LP}$ を線形計画問題の実行可能解集合とする．

$$\chi^{\rm LP} = \left\{ x \left| \begin{array}{l} \sum_{a \in L} x_{pq;ab} = x_{q;b}, \forall(p,q) \in e, b \in L \\ \sum_{b \in L} x_{pq;ab} = x_{p;a}, \forall(p,q) \in e, a \in L \\ \sum_{a \in L} x_{p;a} = 1, \forall p \in v, a \in L \\ x_{p;a}, x_{pq;ab} \in \{0,1\} \end{array} \right. \right\} \tag{9}$$

2.2 二次計画問題を用いた MRF

一般的には MRF は線形計画問題に緩和されるが本稿では二次計画問題としても定式化しておく．MRF 問題を二次計画問題として書き表すために， 線形計画問題の式において $x_{pq;ab} = x_{p;a}x_{q;b}$ としてエッジ変数をノード変数の積で置き換える．

$$\min_{x \in \chi^{\rm QP}} E(\theta, x) = \sum_{p \in v, a \in L} \theta_p(a) x_{p;a} + \sum_{(p,q) \in e,\ a,b \in L} \theta_{p,q}(a,b) x_{p;a} x_{q;b} \tag{10}$$

ここで $\chi^{\rm QP}$ を二次計画問題の実行可能解集合とする．

$$\chi^{\rm QP} = \left\{ x \left| \begin{array}{l} \sum_{a \in L} x_{p;a} = 1, \forall p \in v, a \in L \\ x_{p;a}, x_{pq;ab} \in \{0,1\} \end{array} \right. \right\} \tag{11}$$

3. Dual Decomposition

Dual Decomposition (DD) は主問題を小さないくつかの部分問題に分割し，それぞれの問題について最適化を行う手法の 1 つである [6], [9]．まず主問題のエネルギーを次のように書き換える．

$$\min_{x \in \chi} E(\theta, x) = \sum_{p \in v} \theta_p^T x_p + \sum_{pq \in e} \theta_{pq}^T x_{pq} = \sum_{p \in v \cup e} \theta_p^T x_p \tag{12}$$

ここで x_p はノード p に対応する変数で，x_{pq} はエッジ (p,q) に対応する変数，θ_p は x_p に対応するコストで，θ_{pq} は x_{pq} に対応するコストである．それぞれ書き表すと次のようになる．

$$x_p = (x_{p;0}, x_{p;1}, \cdots, x_{p;L_N})^T \tag{13}$$

$$x_{pq} = (x_{pq;00}, x_{pq;01}, \cdots, x_{pq;0L_N}, x_{pq;10}, \cdots x_{pq,L_N L_N})^T \tag{14}$$

$$\theta_p = (\theta_p(0), \theta_p(1), \cdots, \theta_p(L_N))^T \tag{15}$$

$$\theta_{pq} = (\theta_{pq}(0,0), \theta_{pq}(0,1), \cdots, \theta_{pq}(0, L_N), \theta_{pq}(1,0), \cdots, \theta_{pq}(L_N, L_N))^T \tag{16}$$

これを，以下のように N 個の部分問題 f^i に分割する．

$$\min_{x \in \chi} E(\theta, x) = \sum_i f^i(\theta^i, x^i) \tag{17}$$

$$\text{s.t. } x^i \in \chi^i,\ x^i - \overline{x}^i = 0 \tag{18}$$

ここで χ^i は i 番目の部分問題がもつ実行可能解であり，x^i は i 番目の部分問題の変数，$\overline{x}$ は部分問題同士が同じ解を持つための制約変数，$\overline{x}^i$ は i 番目の部分問題の変数に対応する制約変数である．ここで i 番目の部分問題は

$$f^i(\theta^i, x^i) = f_p^i(\theta_p^i, x_p^i) + f_{pq}^i(\theta_{pq}^i, x_{pq}^i) \tag{19}$$

である．ここで x_p^i は i 番目の部分問題におけるノード p に対応する変数，x_{pq}^i は i 番目の部分問題におけるエッジ (p,q) に対応する変数である．また v^i は部分問題 f^i に対応するグラフが含むノード集合，e^i は部分問題 f^i に対応するグラフが含むエッジ集合であり，$v = \cup_i v^i, e = \cup_i e^i$ である．

この制約付き最適化問題のラグランジュ関数は次のようになる．

$$L(x, \overline{x}, \lambda) = \sum_i f_p^i(x_p^i) + \sum_i \lambda_p^{iT}(x_p^i - \overline{x}_p^i) + \sum_i f_{pq}^i(x_{pq}^i) + \sum_i \lambda_{pq}^{iT}(x_{pq}^i - \overline{x}_{pq}^i) \tag{20}$$

$$= \sum_i [f_p^i(x_p^i) + \lambda_p^{iT} x_p^i] - (\sum_i \lambda_p^{iT}) \overline{x}_p^i + \sum_i [f_{pq}^i(x_{pq}^i) + \lambda_{pq}^{iT} x_{pq}^i] - (\sum_i \lambda_{pq}^{iT}) \overline{x}_{pq}^i \tag{21}$$

ここで λ はラグランジュ乗数（双対変数）であり，以下の実行可能解集合に属する．

$$\Lambda = \left\{ \{\lambda^i\} \left| \sum_i \lambda_p^i = 0, \sum_i \lambda_{pq}^i = 0 \right. \right\} \tag{22}$$

λ_p^i などの記号は x_p^i の記法にずる．

ラグランジュ関数の最小値

$$g^i(\lambda^i) = \min_{x^i \in \chi^i,\ \overline{x}} L(x, \overline{x}, \lambda) \tag{23}$$

の和

$$g(\lambda) = \sum_i g^i(\lambda^i) \tag{24}$$

は主問題の下界となる．DD は下界を λ について最大化する．

$$\max_{\lambda^i \in \Lambda} g(\lambda) \tag{25}$$

分割した部分問題のコストは次のようになる．

$$f^i(\theta_p^i, x_p^i) = \sum_{p \in G(p)} \frac{\theta_p^T}{|G(p)|} x_p^i + \lambda_p^{iT}(x_p^i - \overline{x}_p^i) \tag{26}$$

$$= \sum_{p \in G(p)} \left(\frac{\theta_p^T}{|G(p)|} + \lambda_p^{iT} \right) x_p^i - \lambda_p^{iT} \overline{x}_p^i \tag{27}$$

ここで $G(p)$ は p を含む部分問題，$p \in v \cup e$ である．例え

Vol.2015-CVIM-195 No.50
2015/1/23

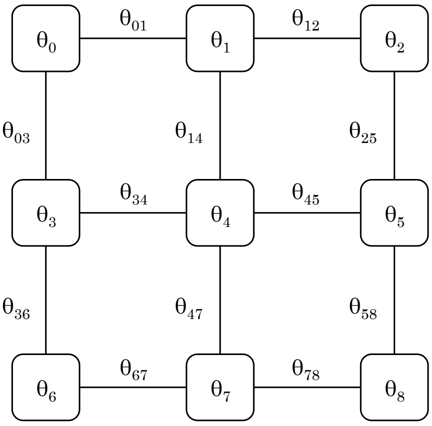

図 1 3 × 3 グラフの例

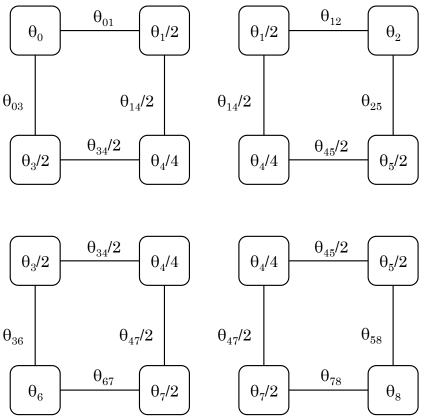

図 2 3 × 3 グラフを分割した例

ば 3 × 3 のグラフ（図 1）を，ループを含む部分グラフに分割すると図 2 のようになる．

λ_p^i の更新式は次のように書き表される．

$$x_p^i, x_{pq}^i \leftarrow \arg\min_{x_p^i, x_{pq}^i} (f^i(\theta^i, x^i)) \tag{28}$$

$$\overline{x}_p^i \leftarrow \frac{\sum_{j\in G(p)} x_p^j}{|G(p)|}, \quad p = v \cup e \tag{29}$$

$$\lambda_p^i \leftarrow \lambda_p^i + \alpha_t(x_p^i - \overline{x}_p^i), \quad p = v \cup e \tag{30}$$

4. Alternating Direction Multiplier Method

Alternating Direction Multiplier Method (ADMM) [2] は DD と同様に主問題を小さないくつかの部分問題に分割し，それぞれの問題について最適化を行う手法の 1 つである．問題の分割方法は DD と同じ式 (17) であるが，部分問題のコストは DD の式 (27) を拡張ラグランジュ関数に置き換えた次式を用いる．

$$f^i(\theta_p^i, x_p^i) = \sum_{p\in G(p)} \left(\frac{\theta_p^T}{|G(p)|} + \lambda_p^{iT} \right) x_p^i + \frac{\rho}{2} ||x_p^i - \overline{x}_p^i||_2^2 \tag{31}$$

ここで $p \in v \cup e$ である．$x_p^i, \overline{x}_p^i, \lambda_p^i$ の更新式は次のように書き表される．

$$x_p^i, x_{pq}^i \leftarrow \arg\min_{x_p^i, x_{pq}^i} (f^i(\theta^i, x^i)) \tag{32}$$

$$\overline{x}_p^i \leftarrow \frac{\sum_{j\in G(p)} x_p^j}{|G(p)|}, \quad p = v \cup e \tag{33}$$

$$\lambda_p^i \leftarrow \lambda_p^i + \rho(x_p^i - \overline{x}_p^i), \quad p = v \cup e \tag{34}$$

5. 内点法

本研究では ADMM の二次計画問題 (32) を解くために内点法 [3] を用いる．ここでは二次計画問題を扱う主双対内点法を用いる．二次計画問題は以下の形式で与えられる．

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \tag{35}$$

$$\text{s.t. } Ax = b, x \geq 0 \tag{36}$$

ここで $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は正値対称行列，$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ は行に対してフルランク行列，$c \in \mathbf{R}^n$，$b \in \mathbf{R}^m$ である．これに対する双対問題は

$$\max_{x,z\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{R}^m} -\frac{1}{2} x^T Q x + b^T y \tag{37}$$

$$\text{s.t. } -Qx + A^T y + z = c, z \geq 0 \tag{38}$$

主双対内点法では主問題と双対問題を同時に解く．

以下では二つの手法を説明する．Merhotra の手法 [7] と Curtis and Nocedal の手法 [4] を説明する．

5.1 Merhotra の予測子・修正子法

Merhotra の予測子・修正子法 [7] とは線形計画問題に用いられる内点法である．ここではその手法を二次計画問題へと拡張する．アルゴリズムは以下である．

まず以下の式によりアフィンスケーリング方向 $(\Delta x_1^k, \Delta y_1^k, \Delta z_1^k)$ を求める．

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^T & I \\ Z_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^k \\ \Delta y_1^k \\ \Delta z_1^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^k - b \\ -Qx^k + A^T y^k + z^k - c \\ X_k z^k \end{pmatrix} \tag{39}$$

次に以下の式により最大ステップサイズ $\overline{\alpha}_P$ と $\overline{\alpha}_D$ を求め，v に対して γ を計算する．

$$\overline{\alpha}_P = \max\{\alpha : x^k + \alpha\Delta x_1^k \geq 0\} \tag{40}$$

$$\overline{\alpha}_D = \max\{\alpha : z^k + \alpha\Delta z_1^k \geq 0\} \tag{41}$$

$$\gamma = \left(\frac{\left(x^k + \overline{\alpha}_P \Delta x_1^k\right)^T \left(z^k + \overline{\alpha}_D \Delta z_1^k\right)}{\left(x^k\right)^T z^k} \right)^v \tag{42}$$

$$\mu^k = \frac{\left(x^k\right)^T z^k}{n}, \mu = \gamma\mu^k \tag{43}$$

次に以下の式により方向 $(\Delta x_2^k, \Delta y_2^k, \Delta z_2^k)$ を求める．

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^T & I \\ Z_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_2^k \\ \Delta y_2^k \\ \Delta z_2^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta X_1^k \Delta z_1^k - \mu e \end{pmatrix} \tag{44}$$

そして，探索方向 $(\Delta x^k, \Delta y^k, \Delta z^k) = (\Delta x_1^k, \Delta y_1^k, \Delta z_1^k) + (\Delta x_2^k, \Delta y_2^k, \Delta z_2^k)$ を計算し，この方向への最大ステップサイズを求める．

$$\tilde{\alpha}_P = \max\{\alpha : x^k + \alpha \Delta x^k \geq 0\} \tag{45}$$

$$\tilde{\alpha}_D = \max\{\alpha : z^k + \alpha \Delta z^k \geq 0\} \tag{46}$$

$$\alpha_P = \min\{0.99\tilde{\alpha}_P, 1\}, \tag{47}$$

$$\alpha_D = \min\{0.99\tilde{\alpha}_D, 1\} \tag{48}$$

そして，次の点を求める．

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_P \Delta x \\ \alpha_D \Delta y \\ \alpha_D \Delta z \end{pmatrix} \tag{49}$$

$k \leftarrow k+1$ として式 (34) まで戻り，繰り返す．

5.2 Curtis and Nocedal の手法

Curtis and Nocedal の手法 [4] は二次計画問題を主双対内点法で解く場合のステップ幅の選択手法である．以下アルゴリズムの手順を説明する．

まず以下の式で探索方向を計算する．

$$\begin{pmatrix} Ax^k - b \\ -Qx^k + A^T y^k + z^k - c \\ X_k z^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c + \gamma e \end{pmatrix} \tag{50}$$

ここで r_p，r_d，r_c，γ は

$$\begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax^k - b \\ -Qx^k + A^T y^k + z^k - c \\ X_k z^k \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\gamma = \sigma\mu \ , \ \mu = \frac{x^T z}{n} \ , \ \sigma \in (0, 1) \tag{52}$$

であり，$e \in \mathbf{R}^n$ は 1 を要素に持つベクトルである．

次に x，z の要素がすべて正となるようなステップ幅 α_x，α_z を求める．

$$\overline{\alpha}_x = \beta[\max_{k=1,\dots,n}\{1, -\Delta x_k / x_k\}]^{-1} \tag{53}$$

$$\overline{\alpha}_z = \beta[\max_{k=1,\dots,n}\{1, -\Delta z_k / z_k\}]^{-1} \tag{54}$$

$$0 < \beta < 1 \tag{55}$$

そしてより小さい方を $\overline{\alpha}$ とする．

$$\overline{\alpha} = \min\{\overline{\alpha}_x, \overline{\alpha}_z\} \tag{56}$$

r，s，t，u を以下のように定める．

$$r = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \end{pmatrix} \ , \ s = \begin{pmatrix} -A \\ Q \end{pmatrix} \Delta x \tag{57}$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ -A^T \end{pmatrix} \Delta y \ , \ u = \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix} \Delta z \tag{58}$$

以下で 2 変数の二次計画問題を解き，ステップ幅 α_x，α_y，α_z を求める．

$$\min_x q(x) = c'^T x + \frac{1}{2} x^T Q' x \tag{59}$$

この問題を解くときには，以下の手順を踏む．

- 1 つ目：$\alpha_z = \alpha_x$ と仮定して，以下の問題を解く．

$$\min_{\alpha_x, \alpha_y \in \mathbf{R}} q_1(\alpha_x, \alpha_y) \quad \text{s.t. } 0 \leq \alpha_x \leq \overline{\alpha} \tag{60}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} (s+u)^T(s+u) + \Delta x^T \Delta z & (s+u)^T t \\ (s+u)^T t & t^T t \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$c' = \begin{pmatrix} r^T(s+u) + \frac{1}{2}(\Delta x^T z + x^T \Delta z) \\ t^T t \end{pmatrix} \tag{62}$$

- 2 つ目：もし $\overline{\alpha}_x \leq \overline{\alpha}_z$ ならば，$\alpha_x = \overline{\alpha}_x$ と仮定して，以下の問題を解く．

$$\min_{\alpha_y, \alpha_z \in \mathbf{R}} q_2(\alpha_y, \alpha_z) \quad \text{s.t. } 0 \leq \alpha_z \leq \overline{\alpha}_z \tag{63}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} t^T t & t^T u \\ t^T u & u^T u \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$c' = \begin{pmatrix} r^T t + \overline{\alpha}_x s^T t \\ r^T + \frac{1}{2} x^T \Delta z + \overline{\alpha}_x (s^T u + \frac{1}{2} \Delta x^T \Delta z) \end{pmatrix} \tag{65}$$

そうでなければ（$\overline{\alpha}_x > \overline{\alpha}_z$），$\alpha_z = \overline{\alpha}_z$ と仮定して，以下の問題を解く．

$$\min_{\alpha_x, \alpha_y \in \mathbf{R}} q_3(\alpha_x, \alpha_y) \quad \text{s.t. } 0 \leq \alpha_x \leq \overline{\alpha}_x \tag{66}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} s^T s & s^T t \\ s^T t & t^T t \end{pmatrix} \tag{67}$$

$$c' = \begin{pmatrix} r^T s + \frac{1}{2} \Delta x^T z + \overline{\alpha}_z (s^T u + \frac{1}{2} \Delta x^T \Delta z) \\ r^T t + \overline{\alpha}_z t^T u \end{pmatrix} \tag{68}$$

そして，式 (60)-(62) と式 (63)-(68) のステップ幅のうち，以下のメリット関数をより小さくするステップ幅を採用する．

$$\phi(x + \alpha_x \Delta x, y + \alpha_y \Delta y, z + \alpha_z \Delta z) \tag{69}$$

$$= ||r + \alpha_x s + \alpha_y t + \alpha_z u||^2 + (x + \alpha_x \Delta x)^T (z + \alpha_z \Delta z) \tag{70}$$

そして．次の点を求める．

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_x \Delta x \\ \alpha_y \Delta y \\ \alpha_z \Delta z \end{pmatrix} \tag{71}$$

$k \leftarrow k+1$ として式 (45) まで戻り，繰り返す．

6. ADMM への内点法の適用

前節で説明した内点法を用いて本節では ADMM へ適用する方法を示す．まず，部分問題のコスト (31) を二次計画問題形式に以下のように変形する．

$$f^i(\theta_p^i, x_p^i) = \sum_{p \in G(p)} \left(\frac{\theta_p^T}{|G(p)|} + \lambda_p^{iT} \right) x_p^i + \frac{\rho}{2} ||x_p^i - \overline{x}_p^i||_2^2 + \frac{1}{|G(p,q)|} x_p^{iT} \Theta_{pq}^i x_q^i \tag{72}$$

$$= \sum_{p \in G(p)} \left(\frac{\theta_p^T}{|G(p)|} + \lambda_p^{iT} - \rho \overline{x}_p^{iT} \right) x_p^i + x_p^{iT} \frac{1}{|G(p,q)|} \Theta_{pq}^i x_q^i + \frac{\rho}{2} x_p^{iT} x_p^i + \frac{\rho}{2} \overline{x}_p^{iT} \overline{x}_q \tag{73}$$

$$= \frac{1}{2} \hat{x}_p^{iT} Q^i \hat{x}_p^i + c^{iT} \hat{x}_p^i \tag{74}$$

ここで $\hat{x}_p^i$ は，部分問題 i に属する全てのノード p に対応する変数 x_p^i からなるベクトル，Q^i, c^i は対応する二次と一次の係数である．また

$$\Theta_{pq} = [\theta_{pq}(i-1, j-1)]_{i,j} \tag{75}$$

である．

$x_p^i, \overline{x}_p^i, \lambda_p^i$ の更新式は次のように書き表される．

$$x_p^i, x_{pq}^i \leftarrow \arg\min c^{iT} \hat{x}_p^i + \frac{1}{2} \hat{x}_p^{iT} Q^i \hat{x}_p^i \tag{76}$$

$$\overline{x}_p^i \leftarrow \frac{\sum_{j \in G(p)} x_p^j}{|G(p)|}, \quad p = v \cup e \tag{77}$$

$$\lambda_p^i \leftarrow \lambda_p^i + \rho (x_p^i - \overline{x}_p^i), \quad p = v \cup e \tag{78}$$

また ρ は [2] に従って更新する．

7. おわりに

本稿では MRF に対し内点法を用いた ADMM を適用する方法を提案した．MRF 最適化問題を二次計画問題に定式化し，二次計画問題を扱う内点法の手法を二つ説明した．今後の課題は，アルゴリズムの実装と，部分問題への分割を最小全域木に分割した場合とループを含む部分グラフに分割した場合の比較実験を行うことである．

参考文献

[1] Aguiar, P., Xing, E. P., Figueiredo, M., Smith, N. A. and Martins, A.: An Augmented Lagrangian Approach to Constrained MAP Inference, *Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning (ICML-11)* (Getoor, L. and Scheffer, T., eds.), New York, NY, USA, ACM, pp. 169–176 (2011).

[2] Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J.: Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers, *Found. Trends Mach. Learn.*, Vol. 3, No. 1, pp. 1–122 (online), DOI: 10.1561/2200000016 (2011).

[3] Boyd, S. and Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press (2004).

[4] Curtis, F. and Nocedal, J.: Steplength selection in interior-point methods for quadratic programming, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 20, No. 5, pp. 516 – 523 (online), DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2006.05.020 (2007).

[5] Forouzan, S. and Ihler, A.: Linear Approximation to ADMM for MAP inference, *JMLR W&CP*, Vol. 29, pp. 48–61 (2013).

[6] Komodakis, N., Paragios, N. and Tziritas, G.: MRF Energy Minimization and Beyond via Dual Decomposition, *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, Vol. 33, No. 3, pp. 531–552 (online), DOI: 10.1109/TPAMI.2010.108 (2011).

[7] Mehrotra, S.: On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM J. Optimization*, Vol. 2, pp. 575–601 (1992).

[8] Meshi, O. and Globerson, A.: An Alternating Direction Method for Dual MAP LP Relaxation, *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases* (Gunopulos, D., Hofmann, T., Malerba, D. and Vazirgiannis, M., eds.), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6912, Springer Berlin Heidelberg, pp. 470–483 (2011).

[9] Strandmark, P., Kahl, F. and Schoenemann, T.: Parallel and Distributed Vision Algorithms Using Dual Decomposition, *Comput. Vis. Image Underst.*, Vol. 115, No. 12, pp. 1721–1732 (online), DOI: 10.1016/j.cviu.2011.06.012 (2011).

[10] Wang, C., Komodakis, N. and Paragios, N.: Markov Random Field Modeling, Inference & Learning in Computer Vision & Image Understanding: A Survey, *Comput. Vis. Image Underst.*, Vol. 117, No. 11, pp. 1610–1627 (online), DOI: 10.1016/j.cviu.2013.07.004 (2013).