情報処理学会論文誌　Vol.55　No.11　2344–2352 (Nov. 2014)

一般化三並べの拡張：一手 p 石

ディプタラマ[1,a)]　成澤 和志[1]　篠原 歩[1]

受付日 2014年2月21日, 採録日 2014年9月12日

概要：一般化三並べとは，Frank Harary によって提案された 2 人完全情報ゲームであり，碁盤目状の盤面に先手後手が交互に石を 1 つずつ置いていき，あらかじめ定められた動物（連結した石で定義される形）を先に作ったプレイヤが勝ちとなるゲームである．本研究では，一般化三並べにおいてプレイヤが置く石を，先手初手は q 個，以降は先手も後手も p 個とするという拡張を行った新たなゲーム $\mathsf{GTTT}(p,q)$ を提案する．$\mathsf{GTTT}(p,q)$ と通常の一般化三並べの大きく異なる点は，後手が勝つことができる動物が存在するということである．そこで，本論文では $\mathsf{GTTT}(p,q)$ における動物を先手必勝型および後手必勝型，引き分け型の 3 種類に分類する．また，引き分け型を証明するための新たな方法である拡張畳敷き戦略および 4 × 4 マス戦略を提案する．

キーワード：ポリオミノ，アチーブメントゲーム，一般化三並べ，畳敷き戦略，必勝法，勝ち型，負け型

Extension of Generalized Tic-Tac-Toe: p stones for one move

Diptarama[1,a)]　Kazuyuki Narisawa[1]　Ayumi Shinohara[1]

Received: February 21, 2014, Accepted: September 12, 2014

Abstract: Frank Harary introduced achievement games for polyominoes as generalized Tic-Tac-Toe. Two players alternately mark cells on a board, and the player who first achieves a given polyomino wins. In this paper, we propose a new game: $\mathsf{GTTT}(p,q)$, that is expanded on the number of the stone that each player puts on the board for one move. Black player first puts q stones and after that both players put p stones on the board. $\mathsf{GTTT}(p,q)$ is different from the original generalized Tic-Tac-Toe in that the white player can be a winner although he/she can never win on the original generalized Tic-Tac-Toe. We analyze the property of the game and decide whether animals are *winner*, *loser* or *draw* for each game. Moreover, we propose new methods to prove that an animal is draw for $\mathsf{GTTT}(2,1)$ and $\mathsf{GTTT}(2,2)$.

Keywords: polyomino, achievement game, generalized Tic-Tac-Toe, pairing strategy, winning strategy, winner, loser

1. はじめに

一般化三並べは Frank Harary によって提案された，盤面上に目標とする石の配置を先に作ったプレイヤが勝ちという 2 人完全情報ゲームである [1], [2], [3], [4].

定義 1（一般化三並べ）. 無限の大きさの碁盤目状の盤面に先手と後手が交互に石を 1 つずつ置き，目標とする石の配置を先に作ったプレイヤが勝ちとなるゲームを**一般化三並べ**という．

ここで目標とする石の配置を**動物**と呼び，その動物を構成する石の数を**細胞数**と呼ぶ．このゲームでは，動物とは辺で連結した石の配置の形である．また，90 度ごとの回転や反転した配置は同じ動物であると見なす．細胞数や石の連結の仕方によって，**図 1** に示した様々な動物を作ることができる．動物の形によっては Tic や El などの名前がついているものもある．このゲームで使われる盤面の大きさは一般的に自由に決めることができるが，本研究では盤面の大きさを無限大とする．以後，慣例に従って，先手の石を黒石●，後手の石を白石○で表し，手番の表記を❶,①,❷,②,❸,③. . . とする．

1　東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, Sendai, Miyagi 980–8579, Japan
a)　diptarama@shino.ecei.tohoku.ac.jp

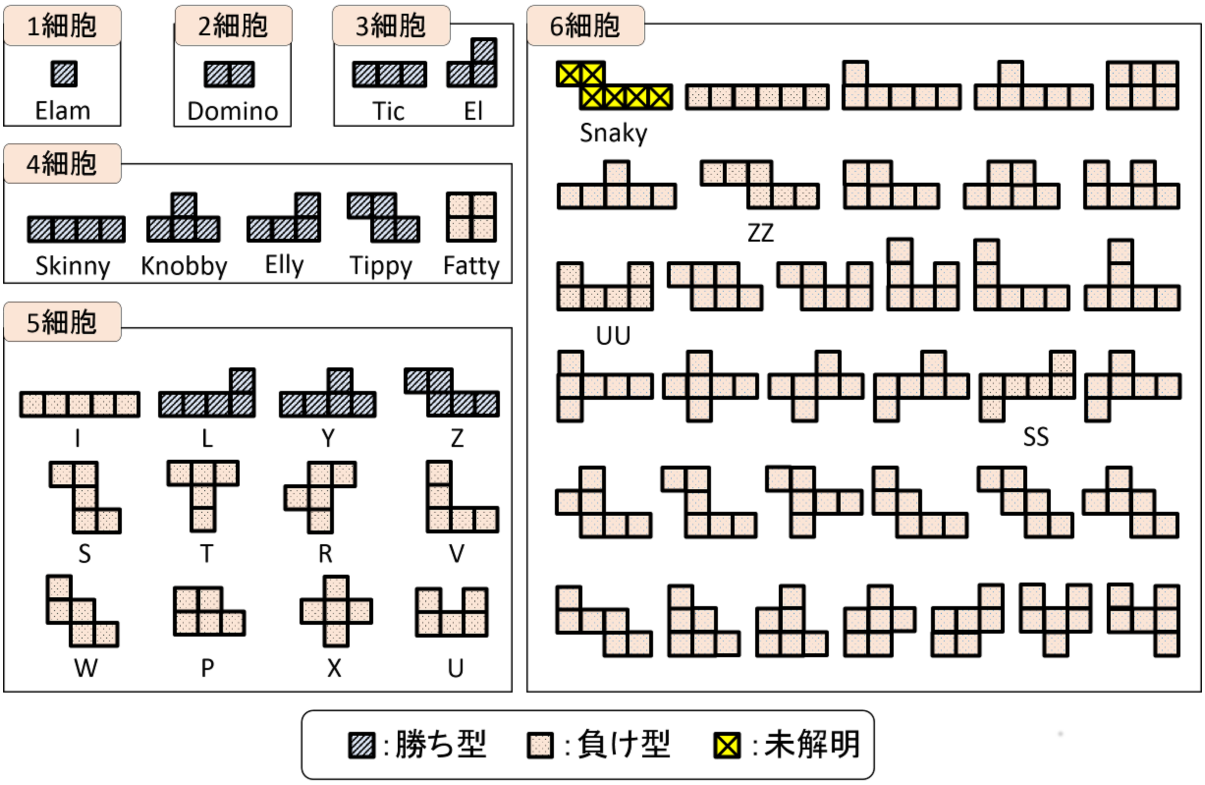


図 1　1 細胞から 6 細胞動物までの一覧と，一般化三並べにおける勝ち型と負け型の判定結果．なお 7 細胞以上の動物はすべて負け型である

Fig. 1　Win-loss standings of polyominoes with 1–6 cells in generalized Tic-Tac-Toe.

一般化三並べの性質として，後手には必勝手順が存在せず，動物の形によって先手に必勝手順が存在するか，または勝敗がつかずにゲームが無限に続くかのどちらかであることが知られている．先手に必勝手順が存在する動物は勝ち型と呼ばれ，そうではない場合，すなわち後手がうまく防御すれば無限にゲームを続けられる動物は負け型と呼ばれている．

ある動物が勝ち型であることを証明するためには，実際に先手必勝となる手順を示したり，計算機を用いた探索アルゴリズムで計算する方法がある．また，ある動物が負け型であることを証明するためには，**畳敷き戦略**と呼ばれる方法が用いられる [4]．この方法は，連続した 2 マスを 1 つの畳として盤面上に畳を重ならずに敷き詰めておき，先手の手に対して後手が同じ畳の他方のマスに石を置くという防御戦略である．この戦略をとると，1 枚の畳に対して必ず先手と後手の石が置かれることになる．そのため，動物を盤面のどこに作ろうとしても必ず 1 つ以上の畳を含むような畳の敷き詰め方が存在すれば，先手は任意の位置に動物を作ろうとしても，その動物の形の中に必ず先手の妨害となる後手の石が存在するため，先手は動物を作ることができない．つまり，その動物は負け型であるといえる．

これまでの研究 [1], [2], [3], [4] で，6 細胞動物 Snaky を除いてすべての動物の勝ち型か負け型かの判定が完了している（図 1）．そのため，ハンディキャップや盤面の大きさを制限するなど，一般化三並べの条件を拡張して，Snaky をはじめとする動物の勝敗判定に関する研究が行われてきた．その拡張の 1 つとして，2 つの動物を組合せた場合の研究も行われている [5], [6]．

本論文では，一般化三並べを別の方向へ拡張し，先手と後手が一度に p 個（ただし，先手の初手のみ q 個）の石を置けるゲームである GTTT(p,q) を提案し，考察を行う．プレイヤが一度に置く石の数が 1 つでない場合，従来の一般化三並べとは異なり，後手が勝つ場合が存在する．そこで，本研究では GTTT(p,q) における各動物を先手必勝型，後手必勝型，引き分け型の 3 つに分類する．また，$p \geq 2$ の場合は一般化三並べにおける畳敷き戦略が使えないため，本論文では新しい証明方法として，畳敷き戦略を拡張した 3 マス畳敷き戦略と組合せ 4 マス畳敷き戦略を提案する．

なお，先手が 1 つ，後手が 2 つずつ石を置くことができる一般化三並べ（ただし後手は先手が動物を作るのを防ぐだけ）は，すでに研究されている [7], [8]．石を斜めを許して直線的に並べる k 目並べに対する同種の拡張はすでに知られており [9]，本研究の記法はその研究に倣うことにする．

本論文は，予稿 [10] として発表した研究をさらに進め，GTTT(p,q) に対してより一般的な性質を示し，多くの動物に対して分類を行ったものである．

2. GTTT(p, q)

Frank Harary が提案した一般化三並べを基にして，1 回の手番で置ける石の数を先手の初手は q 個，以降は先手後手ともに p 個に増やしたゲームである Generalized Tic-Tac-Toe(p, q)（以下 GTTT(p, q) と表す）を提案する．

定義 2（GTTT(p, q)）．$p \geq 1$，$q \geq 1$ とする．無限大の盤面上に，先手が最初に q 個の石を置き，その後は各プレイヤが交互に石を p 個ずつ置き，目標動物を先に作ったプレイヤが勝ちとなるゲームを GTTT(p, q) という．

たとえば，GTTT$(1, 1)$ は既存の一般化三並べそのものであり，GTTT$(1, q)$ は先手に $q - 1$ 石のハンディキャップを与えた一般化三並べと見なすことができる．GTTT$(1, 1)$ では未解明である Snaky も，GTTT$(1, 2)$ においては勝ち型になることが示されている [11], [12], [13]．

すでに述べたように GTTT$(1, 1)$ では後手が必勝になることはないが，本論文で一般化した GTTT(p, q) では，p, q の値と動物によっては，後手勝ちになる場合も出てくる．そこで誤解を避けるために，動物の型を以下のように定義する．

定義 3. GTTT(p, q) において，目標とする動物について，先手がどんな後手の手に対しても必ず勝てるような戦略が存在するとき，その動物を**先手必勝型**と呼ぶ．逆に，先手がどんな手を打っても，後手が必ず勝てるような戦略が存在するとき，その動物を**後手必勝型**と呼ぶ．また，先手にも後手にも必勝戦略が存在せず，互いに最善手を打つと決着がつかずにゲームが無限に続くとき，その動物を**引き分け型**と呼ぶ[*1]．

本論文では，様々な p と q に対する GTTT(p, q) についての解析を行い，各ゲームの性質やゲーム間の関係を明らかにする．また，各動物に対して先手必勝型および後手必勝型，引き分け型の分類を行う．

3. GTTT(p, q) の性質

Frank Harary が提案した一般化三並べ，すなわち GTTT$(1, 1)$ において，後手必勝型となる動物は存在しないことが知られている．この証明に用いられた strategy-stealing 技法を用いることで，一般に以下の定理を導くことができる．

定理 1. 任意の $p > 0$ に対し，GTTT(p, p) において，どの動物も後手必勝型ではない．

証明. GTTT(p, p) において動物 A が後手必勝型であると仮定して矛盾を導く．後手の必勝手順 S を先手は以下のように利用する：まず先手は，初手で任意の p マスを選んで黒石を置く．次に後手が置いた p 個の白石に対して，必勝手順 S の「先手後手の役割を反転させて」（詳しくは後述）選ばれる p マスに黒石を置く．ただしこのとき，そのうちのいくつか（すべての場合も含む）にすでに自分の黒石が置かれているときは，該当する数だけ任意のほかの場所を選んで黒石を置けばよい．なお，この戦略 S に従って選んだマスに，相手の白石が先に置かれることはないことに注意されたい．したがってこの手順を続けていくと，その途中で予定よりも早く黒石によって目標動物 A が完成することはあっても，白石で A が作られることはない．遅くとも，予定通りの手順を終えたところで黒石による目標動物 A ができているはずであり，付加的な黒石の配置はゲームの勝敗に影響を与えないため，先手の勝ちとなる．これは目標動物 A が後手必勝型であるという仮定に矛盾する．

なお，先手後手の役割を単純に反転させただけでは，もちろん想定している盤面と完全に一致する盤面はけっして現れないが，この構成法を続ける限り，先手番に現れる盤面は，この必勝手順 S で現れる可能性のある盤面の白黒を入れ替えたものにちょうど p 個の黒石を追加した盤面に他ならない．このことから，つねに後手の戦略を模倣した手順を先手が打ち続けられることが保証される． □

GTTT(p, q) において n 細胞動物を目標動物とするとき，その勝敗の型は先手と後手のどちらが先に自分の石を盤面上に n 個置くことができるかに大きく依存する．まず，初手で先手または後手が n 個の石を置くことができる場合については，次の 2 つの定理が成り立つ．

定理 2. GTTT(p, q) において，$n \leq q$ である任意の n 細胞動物は先手必勝型である．

証明. 初手で容易に目標動物を作ることができる． □

定理 3. GTTT(p, q) において，$q < n \leq p$ である任意の n 細胞動物は後手必勝型である．

証明. 先手が初手に置いた q 個の石から十分離れた場所に，後手は初手だけで目標動物を作ることができる． □

定理 2 と定理 3 から，$n \leq p$ であるすべての n 細胞動物の勝敗が決定した．よって，以降は $p < n$ となる n 細胞動物について考える．

定理 4. $p < 2q$ である GTTT(p, q) において，任意の $p + 1$ 細胞動物は先手必勝型である．

証明. 目標となる $n = p + 1$ 細胞動物に対して，すべての細胞を含む最小の $x \times y$ $(x < n, y \leq n)$ マスからなる矩形 R を考える．先手は，初手として q 個の黒石を互いに $2(p + 1)$ マス以上離れるように置く．これにより先手は q 箇所に矩形 R を作る（実際は矩形 R に含まれる動物のみを作ればよい）可能性ができた．1 つの黒石を利用した矩形 R を作れなくするためには，黒石を挟み込む形で白石を置く必要があるため，後手は少なくとも 2 つの白石が必要となる．しかし，$p < 2q$ なので後手はたかだか $q - 1$ 箇所に対してしか白石を 2 つ置くことができず，黒石が 1 つと白石が 1 つ以下となる場所が少なくとも 1 つは存在する．

*1 一般化三並べの既存研究においては，これが（先手にとっての）「負け型」と呼ばれている．

表 1　GTTT(p,q) における n 細胞動物に対する型判定の一部
Table 1　Some properties of n cells polyominoes in GTTT(p,q).

細胞数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
GTTT(1,1)	●	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
GTTT(2,1)	●	○											
GTTT(2,2)	●	●	★	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
GTTT(3,1)	●	○	○										
GTTT(3,2)	●	●	○	★									
GTTT(3,3)	●	●	●	★	△	△	△	△	△	△	△	△	△
GTTT(4,1)	●	○	○	○									
GTTT(4,2)	●	●	○	○									
GTTT(4,3)	●	●	●	○	★								
GTTT(4,4)	●	●	●	●	★	△	△	△	△	△	△	△	△
GTTT(5,1)	●	○	○	○	○								
GTTT(5,2)	●	●	○	○	○								
GTTT(5,3)	●	●	●	○	○	★							
GTTT(5,4)	●	●	●	●	○	★							
GTTT(5,5)	●	●	●	●	●	★	△	△	△	△	△	△	△

△ ・・・定理 1 による後手必勝型ではない
● ・・・定理 2 による先手必勝型
○ ・・・定理 3 による後手必勝型
★ ・・・定理 4 による先手必勝型

よって，先手は 2 手目に必ず矩形 R に目標動物を作ることができる．□

定理 1 から定理 4 をまとめたものを**表 1** に示す．表の中の記号と色はその細胞数による動物の型と定理による違いを表している．●や★がついた細胞数の動物はすべて先手必勝型であり，○がついた細胞数の動物はすべて後手必勝型が判明している．一方，表の中の空欄，もしくは△がついている細胞数の動物に対しては，個別に先手必勝型，後手必勝型もしくは引き分け型を判定する必要がある．

GTTT(p,q) では，一般化三並べと同様に，自分の石が置かれることでより不利になることはない．この事実を表す補題を次に示す．

補題 1. プレイヤ P の必勝手順が存在する盤面の任意の空きマスに P の石を追加して得られる盤面に対して，P の必勝手順が存在する．

証明. プレイヤ P の石で目標動物はできていて，相手の石ではできていない盤面を最終盤面と呼ぶ．最終盤面の任意の空きマスにプレイヤ P の石を追加して得られる盤面も最終盤面であり，プレイヤ P が勝ちであることに変わりはない．次に，プレイヤ P の必勝手順 S が存在する任意の盤面 T を考え，その任意の空きマスに P の石を追加して得られる盤面を T' とする．プレイヤ P は，盤面 T' から必勝手順 S にしたがって石を置く；ただし置こうとしたマスにすでに自分の石があるときには任意の空きマスに置けばよい．この手順を繰り返すことで，最終的にプレイヤ P は最終盤面まで到達することができるので，T' もまた P の必勝盤面である．□

補題 2. プレイヤ P の必勝手順が存在する盤面から P の敵側の石を任意に削除して得られる盤面に対して，P の必勝手順が存在する．

証明. プレイヤ P の最終盤面から，相手プレイヤ Q の任意の石を取り除いても，プレイヤ P が勝ちであることに変わりはない．次に，プレイヤ P が必勝手順を持つ任意の盤面 T を考える．盤面 T から，プレイヤ Q の任意の石を取り除いて得られる盤面 T' を考える．この盤面に対してプレイヤ P は必勝手順を維持できる位置に石を置き，プレイヤ Q の手番が来たとする．このとき，先ほど取り除かれた石があったマスにプレイヤ Q が石を置かない場合は，その後，プレイヤ P は盤面 T から石を取り除かない場合の必勝手順となるマスに石を置けばよい．プレイヤ Q が石が取り除かれたマスに石を置いた場合，その後，プレイヤ P は盤面 T にプレイヤ P の石を 1 つ追加した盤面を考える．補題 1 より，この盤面には必勝手順が存在するため，プレイヤ P は必勝手順となるマスに石を置けばよい．この手順を繰り返せば，最終的にプレイヤ Q の石が取り除かれたとしても，プレイヤ P が勝ちとなる最終盤面になり，プレイヤ P が勝ちとなる．□

また，先手初手の石の数 q が異なっていても，ある動物の型が判定できれば，関連するゲームにおけるその動物の型を判定できることがある．以下の 2 つの定理はそのために有用である．

定理 5. GTTT(p,q) において先手必勝型である動物は，GTTT$(p,q+1)$ でも先手必勝型である．

証明. GTTT(p,q) において先手が必勝手順を持てば，補題 1 より初手の数が増えても，そのまま先手の必勝手順として用いることができる．□

定理 6. GTTT(p,q) において後手必勝型である動物は，GTTT(p,p) では先手必勝型である．

証明. n 細胞動物 A が GTTT(p,q) において後手必勝型であると仮定する．GTTT(p,q) において，先手の初手として q 個の石が置かれている状態であっても後手が勝つことができる手順が存在する場合，補題 2 より先手の初手の石をすべて取り除かれて，すなわち初期盤面においても後手が必勝手順を持つ．GTTT(p,p) においては，先手が初手として p 個の石を置けるので，同じ必勝手順を行うことで勝つことができる．□

4. 先手必勝型と後手必勝型

GTTT(p,q) において，ある動物が先手必勝型であることを証明する方法の 1 つとして必勝手順を提示する方法がある．なお，後手必勝型においても同様であるため，ここでは先手必勝型に対してのみ考えることとする．必勝手順を提示するためには，あらゆる後手の石の置き方に対して先手が必ず勝てるような手順を示さなければならない．しかし，すべての可能性を考えると示さなければならない盤面は膨大になる．特に，1 回の手番で複数の石を置く

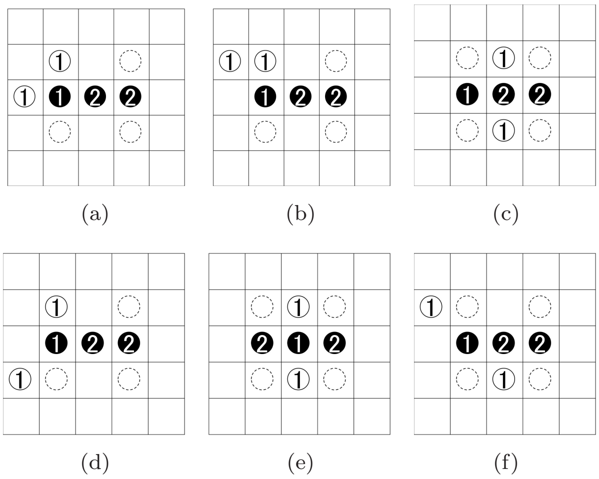


図 2　GTTT(2, 1) で 5 細胞動物 V を目標とする先手の必勝手順
Fig. 2　Winning sequence for 5 cells polyomino V in GTTT(2, 1).

GTTT(p, q) では，手番が進むにつれ石の数の置き方が指数的に増える．その膨大な盤面の数を削減するために，いくつかの手をまとめて同時に証明することで，効率的に必勝手順を示すことができる．

例として，GTTT(2, 1) において 5 細胞の動物 V を目標動物としたときの先手の必勝手順を**図 2** に示す．先手の初手❶に対して，後手①の置き方として❶に隣接した場所に置く場合を考えると図 2 の (a)〜(f) に示す 6 通りである（それ以外の場合も同様に先手の勝ちを示せる）．

それぞれの場合において，次に先手が黒石❷を置いたとすると，後手は動物 V ができるのを防ぐ方法の 1 つとして，破線の円で示されたすべてのマスに白石②を置けばよい．しかしながら，この手番で後手は白石を $p = 2$ 個しか置くことができないため防ぎきれない．よって先手は目標動物 V を作ることに成功する．

5.　引き分け型

本論文で提案する拡張畳敷き戦略は，既存の畳敷き戦略に基づいたものである．そのため，まず GTTT(1, 1) において動物が引き分け型であることを証明する既存方法である，畳敷き戦略を用いた証明方法と 3 × 3 マスの盤面を用いた証明方法 [1], [4] を紹介する．

5.1　GTTT(1, 1) における引き分け型証明方法

5.1.1　畳敷き戦略

畳敷き戦略とは，連続した 2 マスを 1 つの畳に見立てて盤面上に畳を重ならずに隙間なく敷き詰めておき，先手の置いた石に対して後手が同じ畳の他のマスに石を置くという戦略である．後手がこの戦略をとると，どの畳も先手が占有することができなくなる．動物をどこに置いても必ず 1 つ以上の畳を含むような畳の敷き詰め方が存在すれば，その動物は引き分け型であると結論づけられる．なぜならば，先手がどこかに動物を作ろうとしても，その形の中に必ず後手が妨害する石が含まれてしまうからである．

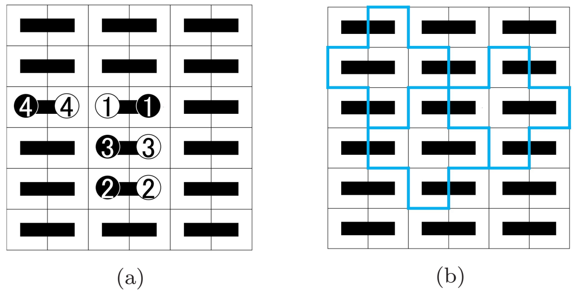


図 3　動物 X を目標とする GTTT(1, 1) における畳敷き戦略
Fig. 3　Pairing strategy for polyomino X in GTTT(1, 1).

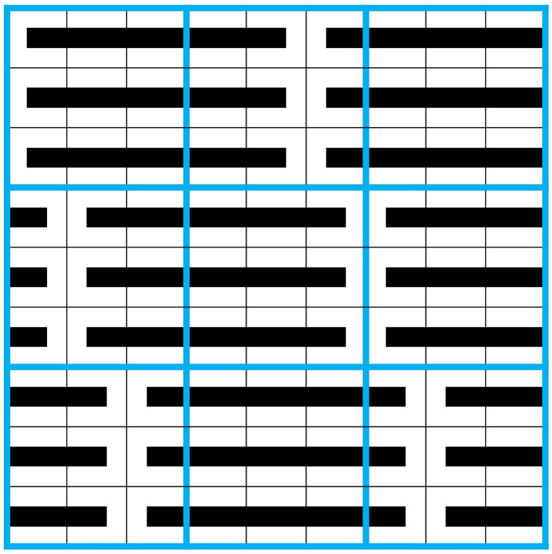


図 4　3 × 3 マス戦略の例
Fig. 4　Example of 3 × 3 cells strategy.

例として，GTTT(1, 1) における十字型の 5 細胞動物 X に対する畳敷きを**図 3** に示す．(a) のように，先手が黒石●を置いた畳と同じ他方のマスに後手は白石○を置く．(b) に例示されるとおり，この X を盤面のどこに作ろうとしても必ず畳を 1 枚は含む．よって動物 X に対する必勝法は存在せず，引き分け型となることが証明された．

5.1.2　3 × 3 マス戦略

3 × 3 マス戦略とは，三並べの性質を利用した 3 × 3 マスの盤面による証明方法である．三並べでは，先手後手がともに最善手を打てば必ず引き分けになるため，3 × 3 マスの盤面に先手も後手も直線を作ることができない．この性質を利用して，5 マス以上の直線が含まれている動物が引き分け型であることを証明する．

図 4 のように盤面上に畳敷き戦略と同様に 3 × 3 のマスを基本単位としてとして盤面上に敷き詰めると，細胞数 5 の直線の動物は盤面上のどこにあっても必ず 3 × 3 マスの中に 3 マスの直線を含むことになる．三並べの性質から，3 × 3 マスの盤面に直線を作ることができないので，この動物を作ることができず，引き分け型であると判定できる．

ここで紹介した畳敷き戦略と 3×3 マス戦略の 2 つの証明方法は GTTT(1,1) に対しては有効であるが，GTTT(2,1) や GTTT(2,2) における引き分け型の証明には使えない．なぜならば，続けて 2 つの石を置くことができるため，2 マスからなる畳を占有することができるためである．よって既存の畳敷き戦略は無効である．また，三並べでは先手後手が 1 つずつ石を置くと引き分けになるが，2 つずつ石を置くとすれば，先手が必勝になるので，3 × 3 マス戦略による証明方法も無効である．そこで，GTTT(2,1) と GTTT(2,2) に対する新たな引き分け型の証明方法を提案する．

5.2　GTTT(2,1), GTTT(2,2) における引き分け型の証明

引き分け型の証明方法として，拡張畳を使う畳敷き戦略と，3 × 3 マス戦略を拡張した 4 × 4 マス戦略を提案する．

5.2.1　3 マス畳による畳敷き戦略

まず，既存の畳敷き戦略の自然な拡張として，畳の大きさを 3 マスに拡張した **3 マス畳**を用いた畳敷き戦略を提案する．3 マス畳の形には，直線型の Tic 畳と L 字型の El 畳がある．この 3 マス畳の敷き方は，既存の畳敷き戦略と同様に盤面上に畳を重ならないように隙間なく敷き詰める．

3 マス畳敷き戦略において，先手の石の置き方は，同じ畳に石を 2 つ置く場合と，別々の 2 つの畳に石を 1 つずつ置く場合の 2 通りの置き方が存在する．これに対する後手の石の置き方は，先手が同じ畳に石を 2 つ置く場合は，後手が先手と同じ畳に 1 つの石を置き，任意の位置にもう 1 つの石を置けばよく，先手が別々の 2 つの畳に石を置く場合は，後手がそれらの畳にそれぞれ石を 1 つ置けばよい．この置き方によって，先手が石を置いた畳には必ず後手の石も置かれていることになり，先手による畳の占有を阻止できる．よって，3 マス畳においても，目標とする動物を任意の位置に置いたときに，必ず畳を含むような畳の敷き方が存在すれば，その動物は引き分け型であると判定できる．

3 マス畳の 1 つである Tic 畳を用いた畳敷き戦略の例を**図 5** に示す．ここで，正方形の 9 細胞動物を目標とすると，この動物をどこに置いても必ず 3 マスの Tic 畳が含まれているので，この動物は引き分け型である．

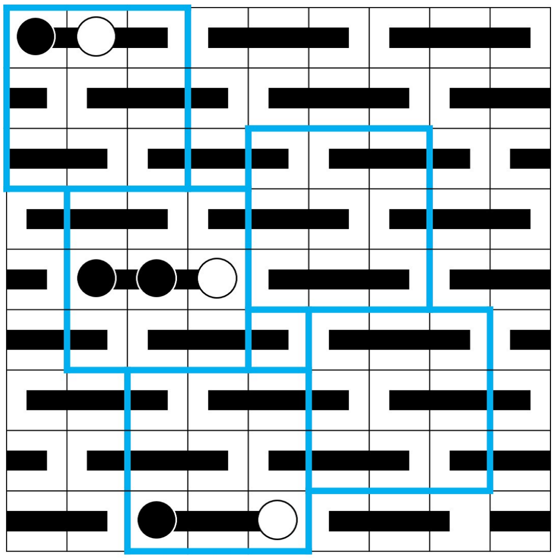


図 5　3 × 3 の正方形の 9 細胞動物を目標とするゲームにおいて，3 マス畳の 1 つである Tic 畳を用いた畳敷き戦略

Fig. 5　3 cells pairing strategy for the 9 cells square polyomino.

3 マス畳による畳敷き戦略は，3 マスの畳を含むような細胞数が多い動物に対して引き分け型を証明することができるが，細胞数が少ない動物や，形が複雑で 3 マス畳を含まないような動物に対しては，引き分け型を証明することができない．そこで，3 マス畳を組み合わせた新しい畳による証明方法を提案する．

5.2.2　組合せ 4 マス畳による畳敷き戦略

2 つの 3 マス畳を，2 マスが重複するように重ね合わせてできる 4 マスの畳を**組合せ 4 マス畳**と呼ぶ．組合せ 4 マス畳の中で重複しているマスを**重複マス**，重複していないマスを**非重複マス**と呼ぶ．重複マスと非重複マスは必ず 2 マスずつ存在する．組合せ 4 マス畳には，**図 6** に示す 6 種類が存在する．

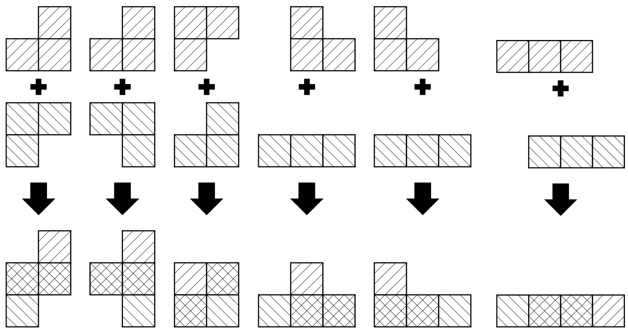
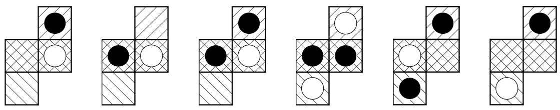


図 6　3 マス畳を組合せた組合せ 4 マス畳

Fig. 6　Combined 4 cells tile by combining two 3 cells tiles.



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

図 7　組合せ 4 マス畳に対する置き方

Fig. 7　Pairing strategy by using combined 4 cells tiles.

この戦略では，組合せ 4 マス畳を，盤面上に重ならないように隙間なく敷き詰める．組合せ 4 マス畳に対する先手の石の置き方は，3 マス畳と同様に，同じ畳に石を 2 つ置く場合と，別々の畳に石を 1 つずつ置く場合の 2 通りがある．先手が同じ畳に石を 2 つ置く場合には，3 マス畳の場合と同様に，後手もその畳に石を 2 つ置けばよい．しかし，先手が別々の畳に石を置く場合は，後手はそれぞれの畳の中の重複マスに石を置かなければいけない．**図 7** に組合せ Tippy 畳（図 6 の一番左の畳）に対する石の置き方を示す．図 7 の (a)〜(e) は正しい置き方であるが，(f) は先手

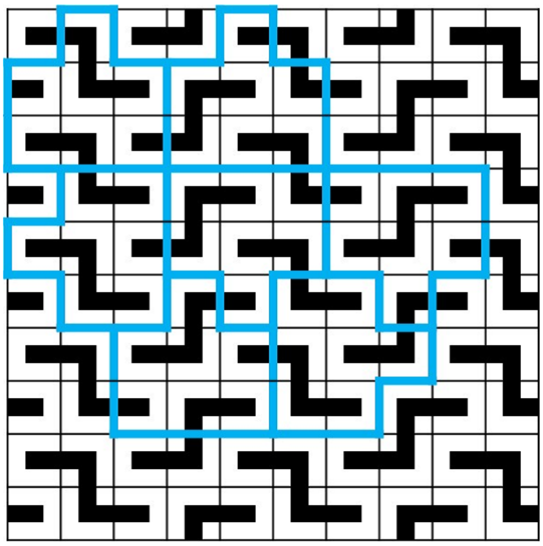


図 8　凸型動物を目標とするゲームにおける，組合せ Tippy 畳を用いた畳敷き戦略
Fig. 8　Pairing strategy by using combined 4 cells tile Tippy for 凸-shaped polyomino.

の黒石に対して，重複マスに置いていないため，この置き方では後手は先手を防ぐことはできない．

この戦略では，目標とする動物を任意の位置に置いたとき，必ず基となる 3 マス畳を含むように，組合せ 4 マス畳を敷き詰める畳の敷き方が存在すれば，その動物は引き分け型であると判定できる．

組合せ 4 マス畳を用いた畳敷き戦略の例として，凸型の 7 細胞動物に対する，組合せ Tippy 畳を用いた畳敷き戦略を図 8 に示す．この畳敷き戦略において，縦では 2 マスずつ繰り返され，横では 4 マスずつ繰り返されるので，各動物の向きに対して 8 通りの動物の置き方が存在する．また，動物の向きは回転と反転を含めて，4 通り存在するが，この畳敷き戦略では上下対称，および左右対称になっているので，動物の向きを上（または下）と右（または左）2 通りだけ考えても良い．そのため，この畳敷き戦略に置いて，動物の置き方が 16 通り存在する，すべての 16 通りの置き方について凸型動物には必ず El 型の 3 マス畳を含んでいるため，この動物は引き分け型である．

5.2.3　4×4 マス戦略

次に，3×3 マスの盤面による証明を拡張した，4×4 マスの盤面を用いた新たな引き分け型の証明方法を提案する．まず，4×4 マスの盤面を用いた次のようなゲームを考える．

定義 4（拡張 4 目並べ）．4×4 マスの盤面上に，先手後手が交互に石を置いていく．先手は 1 回に置く石の数を 1 つまたは 2 つのどちらかから自由に選んで石を置き，それに対して後手が同じ数の石を置く．先に縦または横に石を 4 つ並べた方が勝ちというゲームである．

拡張 4 目並べにおいて，次の性質が成り立つ．

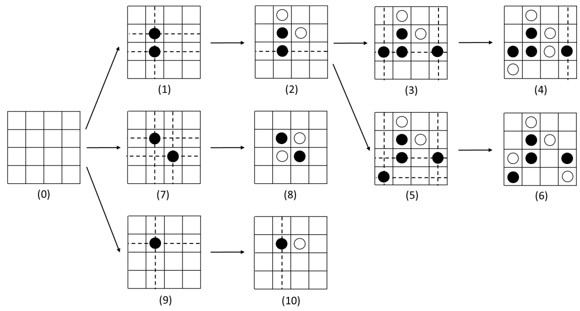


図 9　拡張 4 目並べにおける引き分け手順
Fig. 9　Draw strategy in extended 4 in-a-row game.

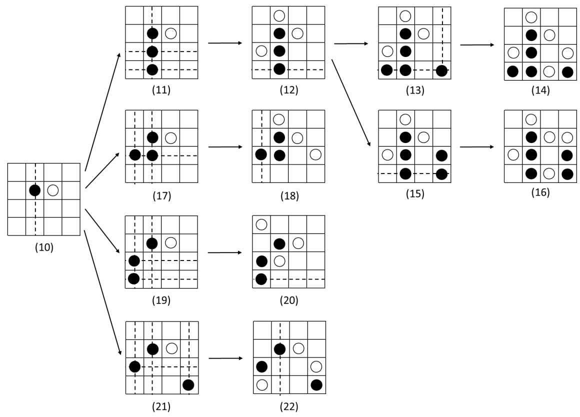


図 10　図 9 の (10) に対する引き分け手順（石を 2 つ置く場合）
Fig. 10　Draw strategy from Fig. 9 (10) by putting 2 stones in 1 turn.

補題 3. 拡張 4 目並べにおいて，任意の盤面の行の入れ替えを行っても，また列の入れ替えを行っても，ゲームの勝敗は変わらない．

証明. 拡張 4 目並べにおける勝利条件は縦または横の直線に石を 4 つ並べることである．ここで，先手の石が 4 つ並んだ行があると仮定し，行の入れ替えを考える．この行が他の行と入れ替わるとき，4 石が並んだまま他の行に移されるので，先手の勝利であることに変わりはない．また，列の入れ替えが行われても，同じ行にある石が入れ替わるだけで，先手の石が 4 つ並んだ行には変化がない．列の入れ替えについても同様である．□

定理 7. 拡張 4 目並べにおいて，先手と後手がともに最善手を打てば，必ず引き分けになる．

証明. 拡張 4 目並べにおける引き分け手順を**図 9** および**図 10**，**図 11** に示す．ここでは，黒石を置くことによって直線を作ることができる代表的な置き方のみを表す．また，補題 3 より，行と列の入れ替えはゲームの勝敗に影響を与えないので，その入れ替えによって図に示した盤面と同一視される石の置き方は省略する．図中の点線は黒石が直線を作る可能性があることを示す．

まず，初期盤面に対する先手黒石の置き方を図 9 に示す．図 9 の (1) と (7) は先手が石を 2 つ，(9) は 1 つ置く場合である．(1) において，縦の点線上に後手が石を置かな

ければ，次の手番において先手が直線を作ることができるため，後手は (2) に示すように縦の点線上に石を 1 つ置き，残り 1 つの石を横の点線上に置く．次に，先手が 2 列目と 3 列目および 1 行目と 2 行目に直線を作ることができないので，この行と列以外に石を置くと考える．そのため，先手は 3 つの石の並べ，2 つの石の並べと独立な 1 つの石，それぞれ (3)，(5) に示す置き方を考え，これに対て後手が先手の直線の候補を減らすためにはそれぞれ (4)，(6) の置き方が考えられる．(4) において，先手が直線を作るためには次の手番で点線上に 3 つの石を置かなければならないが，一度に 2 つの石しか置くことができないため，次に後手はこれを防ぐことができる．よって，この手順では引き分けとなる．また，(6) においては，先手後手ともにどこに置いても直線を作ることができないため引き分けとなる．(7) において，点線の交点に石を置くことによって，すべての先手の直線の候補を防ぐことができ，(8) のようになる．(8) において，先手がどのように石を置いたとしても，後手はこれを防ぐことができるため，引き分けとなる．

また，図 10 および図 11 に図 9 の (10) に対する引き分け手順を示す．1 つの石を置く場合は図 10 に示す 4 通りが考えられる．盤面 (14)，(16) は図 9 の (6) と同様に引き分けになる．盤面 (18)，(20)，(22) は図 10 の (12) と同様に引き分けになる．1 つの石を置く場合は図 11 に示す 2 通りが考えられる．盤面 (26)，(28) は図 9 の (4)，(6) と同様に引き分けになる．盤面 (30) は図 9 の (2) と同じ状態であるため引き分けになる．

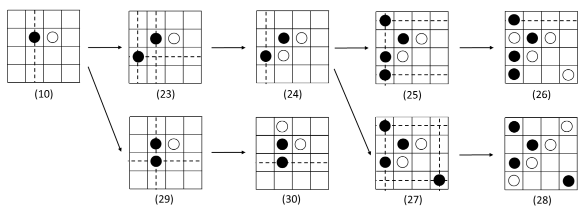


図 11　図 9 の (10) に対する引き分け手順（石を 1 つ置く場合）
Fig. 11　Draw strategy from Fig. 9 (10) by putting 1 stone in 1 turn.

よって，拡張 4 × 4 目並べは先手後手ともに最善手を打てば引き分けとなる．　□

この 4 × 4 マスゲームには先手にも後手にも必勝手順がないという性質を利用して，細胞数 7 の直線の動物を含む動物が引き分け型であることを証明する．無限大の盤面に 4 × 4 マスを 1 組として敷き詰めると，細胞数 7 の直線の動物を盤面上にどこにおいても，必ず 4 × 4 マスの盤面の中に 4 マスの直線が含まれる．よって，定理 7 より 4 × 4 マスの盤面に直線を作ることができないので，この動物は引き分け型である．

6. 動物の分類結果

3 章および 4 章，5 章で示した，必勝手順および引き分け型の証明方法を用いて GTTT(p,q) の具体的なゲームにおける動物に対して先手必勝型および後手必勝型，引き分け型の分類を行った．その結果を**表 2** にまとめる．

先手必勝型と後手必勝型については，証明数探索 [14] を用いた計算機実験によって，必勝手順の検証を行った．引き分け型については，防御のための既存手法である畳敷き戦略がそのままでは適用できないため，提案した組合せ 4 マス畳敷き戦略および 4 × 4 マス戦略を用いて，引き分け型の動物を証明した．

表 2 を見れば分かるように，同じ p の値において，q の値が大きければ大きいほど，先手が有利になることが分かる．

表 2　GTTT(p,q) における動物の分類結果
Table 2　Win-loss standings in GTTT(p,q).

細胞数	1	2	3		4					5												6	7	
動物																								
GTTT(1,1)	●	●	●	●	●	●	●	●	×	●	●	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	?	×	×
GTTT(2,1)	●	○	●	●	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?	?	?	○	×	×
GTTT(2,2)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	●	×	×
GTTT(3,1)	●	○	○	○	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	?	?	?	?
GTTT(3,2)	●	●	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	●	●	?	?	?	?
GTTT(3,3)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?
GTTT(4,1)	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	?	?
GTTT(4,2)	●	●	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?
GTTT(4,3)	●	●	●	●	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?
GTTT(4,4)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?
GTTT(5,1)	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	?	?
GTTT(5,2)	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	?	?
GTTT(5,3)	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	?	?
GTTT(5,4)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	?	?
GTTT(5,5)	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	?	?

● ･･･ 先手必勝型　○ ･･･ 後手必勝型　× ･･･ 引き分け型　? ･･･ 未解明

7. まとめと今後の課題

本論文では，一般化三並べの拡張として，先手の初手に置く石の数を q，その後に置く石の数を p とした GTTT(p,q) を提案した．GTTT(p,q) は一般化三並べとは異なり，後手が勝つことができる動物が存在するため，各ゲームにおける動物を個別に，そして p と q の値に応じて先手必勝型，後手必勝型，引き分け型の 3 種類に分類した．そして，引き分け型であることを証明するための新しい証明方法として，拡張畳敷き戦略と 4×4 マス戦略を提案した．

今後の課題として取り組むべき未解明の動物も多数残っている（表 2）．また，本論文では $q \leq p$ の場合についてのみ考えたが，より一般的な GTTT(p,q) についても解析を続けていく必要がある．そして，先手にも後手にも有利にならない p，q および動物の関係性を発見できれば，ゲームとして面白い GTTT(p,q) を作ることができる．

謝辞　本研究の一部は，JSPS 科研費 23300051 の助成によるものである．

参考文献

[1] Harary, F.: Achievement and avoidance games for graphs, *Proc. Conference on Graph Theory*, Vol.62, pp.111–119 (1982).

[2] Harary, F.: Achieving the skinny animal, *Eureka*, Vol.42, pp.8–14 (1982).

[3] Harary, F. and Harborth, H.: Achievement and avoidance games with triangular animals, *Recreational Math*, Vol.18, pp.110–115 (1986).

[4] 伊藤大雄：パズル・ゲームで楽しむ数学：娯楽数学の世界，森北出版 (2010).

[5] 八鍬友貴，本田耕一，篠原　歩：一般化三並べの変種：負け型のペアは勝てるのか？，第 14 回ゲームプログラミングワークショップ，pp.35–42 (2009).

[6] 本田耕一，八鍬友貴，成澤和志，篠原　歩：一般化三並べの拡張：禁止動物の導入，第 13 回ゲームプログラミングワークショップ，pp.94–100 (2010).

[7] Sieben, N.: Hexagonal polyomino weak $(1,2)$-achievement games, *Acta Cybernetica*, Vol.16, No.4, pp.579–585 (2004).

[8] Fisher, E. and Sieben, N.: Rectangular polyomino set weak $(1,2)$-achievement games, *Theoretical Computer Science*, Vol.409, No.3, pp.333–340 (2008).

[9] Wu, I.-C. and Huang, D.-Y.: A new family of k-in-a-row games, *Proc. Advances in Computer Games*, pp.180–194 (2006).

[10] ディプタラマ，成澤和志，篠原　歩：一般化三並べの拡張：一手 p 石，第 18 回ゲームプログラミングワークショップ，pp.19–26 (2013).

[11] Ito, H. and Miyagawa, H.: Snaky is a winner with one handicap, *Proc. 8th Hellenic European Conference on Computer Mathematics and Its Applications* (*HERCMA 2007*), pp.25–26 (2007).

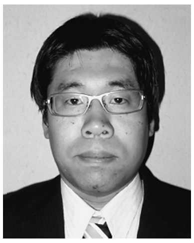
[12] Halupczok, I. and Schlage-Puchta, J.-C.: Achieving snaky, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol.7, G02 (2007).

[13] Sieben, N.: Proof trees for weak achievement games, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol.8, G07 (2008).

[14] Allis, L.V., van der Meulen, M. and van jden Herik, H.J.: Proof-number search, *Artificial Intelligence*, Vol.66, No.1, pp.91–124 (1994).

ディプタラマ

2013 年東北大学工学部情報知能システム総合学科卒業．現在，同大学院情報科学研究科博士課程前期課程在学中．パズルの解法，ゲーム AI の研究に従事．



成澤 和志　（正会員）

東北大学大学院情報科学研究科助教．2005 年九州大学理学部物理学科卒業，2007 年同大学院システム情報科学府情報理学修士課程修了，2010 年同博士後期課程を修了し博士（理学）を取得．2010 年より現職．文字列処理，データ構造，アルゴリズム，ゲーム情報学の研究に従事．

篠原 歩　（正会員）

東北大学大学院情報科学研究科教授．1988 年九州大学理学部数学科卒業，1990 年同大学院総合理工学研究科情報システム学専攻修士課程修了．1994 年博士（理学）．九州大学理学部附属基礎情報学研究施設助手・助教授，九州大学大学院システム情報科学研究科助教授を経て 2005 年より現職．機械学習，文字列処理，データ圧縮，アルゴリズムと計算量の研究に従事．