

次数制約のあるグラフ有向化問題の計算複雑さについて

朝廣 雄^{1,a)} ジャンソン ジェスパ^{2,b)} 宮野 英次^{3,c)} 小野 廣隆^{4,d)}

概要: 無向グラフに対するオリエンテーション (グラフ有向化) とは、各辺に対して向き付けを行うことである。オリエンテーションによる結果として得られる有向グラフにおいて、各頂点の出次数が事前に指定された下界あるいは上界を満たす場合に、それを次数制約オリエンテーションと呼ぶ。本稿では、次数制約オリエンテーションを求める問題の一種である、2つのお互いに関連する MIN W -LIGHT 問題と MAX W -HEAVY 問題について考える。任意の固定された非負整数 W に対して、MIN W -LIGHT (または MAX W -HEAVY) 問題は、入力された無向グラフ G のオリエンテーションのうち、出次数 W 以下 (または W 以上) の頂点数を最小化 (または最大化) するものを発見することを目的とする。これらの問題の計算複雑さは W の値によって変化する。本稿では、これらの問題の計算複雑さ (主に近似可能性) に関するいくつかの結果を示す。

1. はじめに

無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。 G の頂点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$ と $E(G)$ で表す。グラフ G のオリエンテーションとは、各無向辺 $\{u, v\} \in E(G)$ に対して、2種類の向き付け (u, v) と (v, u) のどちらかを割り当てる関数である。グラフ $G = (V, E)$ のオリエンテーション Λ に対して、 $\Lambda(E) = \bigcup_{e \in E} \{\Lambda(e)\}$ と定義し、 $\Lambda(G)$ が、 Λ を G に適用して得られる有向グラフ $(V, \Lambda(E))$ を表す。任意の頂点 $u \in V$ に対して u の Λ における出次数を $d_{\Lambda}^{+}(u) = |\{(u, v) : (u, v) \in \Lambda(E)\}|$ 、すなわち、 $\Lambda(G)$ 中で u から出ている辺の数と定義する。任意の非負整数 W とグラフ G のオリエンテーション Λ に対して、 $\Lambda(G)$ 中で頂点 u の出次数 $d_{\Lambda}^{+}(u)$ が $d_{\Lambda}^{+}(u) \leq W$ である時、 u は W -light であると言い、また $d_{\Lambda}^{+}(u) \geq W$ である時には W -heavy であると言う。任意の $U \subseteq V$ について、 U の全ての頂点が W -light (または W -heavy) であるとき、 U は W -light (または W -heavy) であると言う。完全グラフのオリエンテーションに関して、以下の結果が知られている。

主張 1 ([3]) 完全グラフ K_{2W+1} には、すべての頂点の

¹ 〒 813-8503 福岡市東区松香台 九州産業大学 情報科学部
² 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 京都大学 化学研究所 バイオインフォマティクスセンター
³ 〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 九州工業大学大学院 情報工学研究院 システム創成情報工学系
⁴ 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 九州大学 大学院経済学研究院 経済工学部門

a) asahiro@is.kyusan-u.ac.jp
b) jj@kuicr.kyoto-u.ac.jp
c) miyano@ces.kyutech.ac.jp
d) hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

出次数と入次数がちょうど W になるようなオリエンテーションがある。

著者らの論文 [2] において、4つの組合せ最適化問題 MAX W -LIGHT, MIN W -LIGHT, MAX W -HEAVY, MIN W -HEAVY が考えられている。各問題の入力は無向グラフ $G = (V, E)$ であり、目的は以下の条件を満たす G のオリエンテーション Λ を求めることである：

MAX W -LIGHT: $|\{u \in V : d_{\Lambda}^{+}(u) \leq W\}|$ が最大

MIN W -LIGHT: $|\{u \in V : d_{\Lambda}^{+}(u) \leq W\}|$ が最小

MAX W -HEAVY: $|\{u \in V : d_{\Lambda}^{+}(u) \geq W\}|$ が最大

MIN W -HEAVY: $|\{u \in V : d_{\Lambda}^{+}(u) \geq W\}|$ が最小

入力グラフ G に対して、 $n = |V|$ と $m = |E|$ とする。頂点 u の次数を $d(u)$ で表し、 $\Delta = \max\{d(u) \mid u \in V\}$ と定義する。

2つの問題 MIN W -LIGHT と MAX $(W+1)$ -HEAVY は補問題の関係にある。すなわち、一方の問題に対する厳密アルゴリズムは、他方に対しても厳密アルゴリズムである。ただし、多項式時間による近似については、そのような関係にはないかもしれない。同様の観察が MAX W -LIGHT と MIN $(W+1)$ -HEAVY についても成り立つ。

これらの問題 MAX W -LIGHT, MIN W -LIGHT, MAX W -HEAVY, MIN W -HEAVY に対する計算複雑さについては、色々な W について文献 [2] と [3] で研究されている。本稿では、これらの問題に対するいくつかの新しい結果を示す。以下では $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定する。

得られた結果

以下で、文献 [2] と [3] による既知の結果と、本稿で得られた結果について簡単にまとめる (表 1)。

表 1 文献 [2] と [3] による既知の結果と本稿で新たに得られた結果

Table 1 Summary of the results from [2] and [3], and the new results in this paper.

W	MAX W -LIGHT	MIN $(W + 1)$ -HEAVY
$= 0$	MAXIMUM INDEPENDENT SET と同一 [2]	MINIMUM VERTEX COVER と同一 [2]
≥ 1	木は多項式時間で最適解を得られる [2] ($n/(2W + 1)$)-近似可能 [3] (n/W) $^{1-\epsilon}$ -近似不可能 [3]	木は多項式時間で最適解を得られる [2] $\log(\Delta - W)$ -近似可能 [3] 1.3606-近似不可能 [3]

W	MIN W -LIGHT	MAX $(W + 1)$ -HEAVY
$= 0$	多項式時間で最適解を得られる [2]	多項式時間で最適解を得られる [2]
≥ 0	外平面グラフは多項式時間で最適解を得られる [2]	外平面グラフは多項式時間で最適解を得られる [2]
≥ 1	($\ln(W + 1) + 1$)-近似可能 (定理 2)	平面グラフは 2-近似可能 [2] ($W + 2$)-近似可能 [2]
≥ 2	平面グラフは \mathcal{NP} 困難 [2]	平面グラフは \mathcal{NP} 困難 [2]
十分大きい	($\ln(W + 1) - O(\log \log W)$)-近似不可能 (系 8)	(n/W) $^{1/2-\epsilon}$ -近似不可能 (定理 9) $W^{1-\epsilon}$ -近似不可能 (系 10)

- MAX W -LIGHT: MAX 0-LIGHT は MAXIMUM INDEPENDENT SET と同一の問題であるので、多項式時間 $n^{1-\epsilon}$ -近似アルゴリズムは存在しない [2], [23]. ここで ϵ は任意の正定数である. また、各 $W \geq 1$ に対して、MAX W -LIGHT には多項式時間 $(n/W)^{1-\epsilon}$ -近似アルゴリズムが存在しない [3]. 一方で、多項式時間 $(n/(2W + 1))$ -近似アルゴリズムが存在する [3].
- MIN W -HEAVY: MIN W -HEAVY には、多項式時間 1.3606-近似アルゴリズムは存在しない [2], [3], [8]. 一方で、多項式時間 $\log(\Delta - W + 1)$ -近似アルゴリズムが存在する [3].
- MIN W -LIGHT: 多項式時間 $(W + 1)$ -近似アルゴリズムが文献 [2] で与えられている. また、MIN 0-LIGHT はクラス \mathcal{P} に属し、2 以上の W に対しては MIN W -LIGHT は \mathcal{NP} -困難となることが文献 [2] に示されているが、MIN 1-LIGHT の計算複雑さについては未知である. 本稿では、2 節の定理 2 において、 $W \geq 1$ に対して多項式時間 $(\ln(W + 1) + 1)$ -近似アルゴリズムを与える. また系 8 において、十分大きな W に対して MIN W -LIGHT には、多項式時間 $(\ln(W + 1) - O(\log \log W))$ -近似アルゴリズムが存在しないことを示す. つまり、本稿で提案する $(\ln(W + 1) + 1)$ -近似アルゴリズムの近似度はほぼ最良である.
- MAX W -HEAVY: 文献 [2] において MAX 1-HEAVY はクラス \mathcal{P} に属するが、3 以上の W に対しては、MAX W -HEAVY は \mathcal{NP} -困難となることが示されている. 4 節の定理 9 では、十分大きな W に対して、多項式時間 $(n/W)^{1/2-\epsilon}$ -近似アルゴリズムが存在しないことを示している. ここで ϵ は任意の正定数である. さらに、4 節の系 10 では、 $W = \Theta(n^{1/3})$ について多項式時間

$W^{1-\epsilon}$ -近似アルゴリズムが存在しないことを示す. なお、多項式時間 $(W + 1)$ -近似アルゴリズムが知られている [2] が、(MIN 1-LIGHT と同様に) MAX 2-HEAVY の計算複雑さについては未知である.

動機

無向グラフのオリエンテーションについて、得られる有向グラフに関する目的関数を最適化する、あるいは、ある種の特徴、例えば非巡回性や k 辺連結性 [7], [16], [18] などを満たすものを発見することは、グラフ理論、組合せ最適化、スケジューリング (負荷分散)、資源割り当て、効率的なデータ構造などに応用がある. 例えば、最大出次数を最小化するオリエンテーション [4], [6], [9], [21] は、グラフの各辺が接続する 2 頂点のうち一方の隣接リストにのみ辺の情報を保存することで隣接リストの長さを短くし、隣接情報に関する高速な問い合わせを実現することに役立つ [6]. 他にも、オリエンテーションに対する色々な目的関数がある (例えば、文献 [1] や、文献 [19] の 61 章を参照されたい).

一方、次数制約のあるオリエンテーションについても研究されている [10], [11], [14], [15]. これらにおいては、グラフ中の各頂点 v に対して、次数に関する下界 $W^l(v)$ と上界 $W^u(v)$ が与えられ、オリエンテーションにより得られる有向グラフ中で、 v の出次数が $W^l(v), \dots, W^u(v)$ の範囲に入っていることが要求される. そのようなオリエンテーションは、必ずしも存在しない. そこで、ある種の次数制約にできるだけ従うようなオリエンテーションを求めるという問題設定が考えられる [1], [2]. 全頂点 v について、非負整数 W に対して $W^l(v) = 0$, $W^u(v) = W$ という制約が与えられ、その出次数の制約を満たす (または制約に違反する) 頂点数を最大化 (または最小化) する

ことを目的とする問題が、MAX W -LIGHT (または MIN $(W + 1)$ -HEAVY) である。同様に、全頂点 v に対して、 $W^l(v) = W$ と $W^u(v) = \infty$ とすると、MAX W -HEAVY と MIN $(W - 1)$ -LIGHT に対応することになる。

2. MIN W -LIGHT に対する貪欲法

まずはじめに、MIN W -LIGHT に対する貪欲法の主な方針について述べる。このアルゴリズムは V から 1 頂点ずつ選び、集合 S に追加していく。 S は、アルゴリズムの開始時点では空集合である。この手続きは、 $V \setminus S$ に属するすべての頂点が $(W + 1)$ -heavy であるようなオリエンテーションを G が持つようになるまで繰り返される。この各繰り返しにおいて、どの頂点を選んで S に追加するかは、次の問題の解により定義される。

問題 ATTAINMENT OF $(W + 1)$ -HEAVY ORIENTATION ($P_1(G, W, S)$):

以下の値を出力せよ。

$$\max_{\Lambda \in \mathcal{O}(G)} \sum_{v \in V \setminus S} \min\{W + 1, d_{\Lambda}^+(v)\}. \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{O}(G)$ は G のオリエンテーション全てを含む集合である。

補題 3 で後に示されるように、問題 $P_1(G, W, S)$ は、最大フロー問題を利用することで、多項式時間で厳密解を得られる。そこで、 S に対して、評価関数 $g_1(S)$ を $P_1(G, W, S)$ の解の値に $|S| \cdot (W + 1)$ を加えたものと定義する。ここで容易に確認されるように、 $g_1(S) = g_1(V) = n(W + 1)$ となる必要十分条件は、 $V \setminus S$ に属する全ての頂点が $(W + 1)$ -heavy となっていることである。さらに、補題 5 で示されるように、 g_1 は非減少劣モジュラ関数である。補題 3 と 5 が成立することを仮定すると、以下の定理を示せる。

定理 2 MIN W -LIGHT に対して、 $O((mn + m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\})n)$ 時間で動作する $(\ln(W + 1) + 1)$ -近似アルゴリズムが存在する。

証明 $\min_{S \subseteq V} \{|S| : g(S) = g(V)\}$ により定義される最適化問題に対する以下の貪欲法は、関数 g が非減少劣モジュラである場合に、近似度 $H(\max_{i \in V} \{g(\{i\}) - g(\emptyset)\}) \leq \ln(\max_{i \in V} \{g(\{i\}) - g(\emptyset)\}) + 1$ を持つことが知られている [22]。ここで $H(i)$ は i 番目の調和数を意味する。

- (1) $S := \emptyset$ とする。
- (2) もし $g(S) = g(V)$ なら、 S を出力して停止する。
- (3) $g(S \cup \{i\}) - g(S)$ を最大化する $i \in V \setminus S$ を探し、 $S := S \cup \{i\}$ として、ステップ (2) に戻る。

評価関数 g_1 をこのアルゴリズムの g として用いると、 $\ln(\max_{i \in V} \{g_1(\{i\}) - g_1(\emptyset)\}) \leq \ln(W + 1)$ であるので、

$(\ln(W + 1) + 1)$ -近似アルゴリズムが得られる。

計算時間について、特に主要なステップ (3) について詳しく述べる。ステップ (3) は、高々 n 回繰り返され、1 回あたり $O(m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\}) + O(mn)$ 時間で実行される。ここで、 $O(m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\})$ の部分は、補題 3 により、 $g_1(S)$ に対して最大フロー問題を解くのに必要な時間である。また、 $O(mn)$ の部分は、 $g_1(S)$ から $g_1(S \cup \{i\})$ を求める際に増加道を n 回求めるために必要な時間である。ステップ (1) は定数時間で実行される。ステップ (2) は $g_1(S)$ を求めるために、ステップ (3) と同様に最大フロー問題を 1 度だけ解く必要がある。以上により、合計の計算時間は $O((mn + m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\})n)$ となる。□

本節の残りの部分では、定理 2 の証明に必要な補題の証明を与える。まず、 $P_1(G, W, S)$ が多項式時間で解けることを示す。

補題 3 $P_1(G, W, S)$ は $O(m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\})$ 時間で厳密解を得られる。

証明 問題 $P_1(G, W, S)$ は、次の通り最大フロー問題に帰着できる。まずネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ を構成する。このネットワークの頂点集合は $\{s, t\} \cup E(G) \cup V(G)$ であり、枝集合は $\{(s, e) : e \in E\} \cup \{(e, u), (e, v) : e = \{u, v\} \in E(G)\} \cup \{(u, t) : u \in V(G)\}$ とする。ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ の頂点数 n_1 は $n_1 = m + n + 2$ 、枝数 m_1 は $m_1 = 3m + n$ となる。各枝の容量は次の通り定める。

$$\begin{aligned} e \in E(G) \text{ に対して, } & \text{cap}((s, e)) = 1 \\ u \in e \in E(G) \text{ に対して, } & \text{cap}((e, u)) = 1 \\ u \in S \text{ に対して, } & \text{cap}((u, t)) = 0 \\ u \in V(G) \setminus S \text{ に対して, } & \text{cap}((u, t)) = W + 1 \end{aligned}$$

図 1 (i) と (ii) に、 $W = 2$ の場合のネットワークの構成例を示している。なお図 1 (ii) 中では、枝の容量は t に入る (u, t) の形式で表される枝に対するものしか記載していない。

ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ の最大フローの大きさが $P_1(G, W, S)$ の解の値に対応することを次のように観察できる。グラフ G 中の各辺 $e (= \{u, v\}) \in E(G)$ に対して、もしネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ 中で、大きさ 1 のフローが s から e に流れているとすると、 u か v の正確にどちらか一方にだけこのフローが流れていることが、フローの整数性から仮定できる。この状況は次のように理解できる：もし e を出た大きさ 1 のフローが u を通る場合、 G 中の辺 $e = \{u, v\}$ は、 (u, v) 、すなわち u から v の方へ向き付けされる。そうでない場合は (v, u) と向き付けされる。ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ 中で頂点 u を通るフローの大きさは、 $W + 1$ と、対応するオリエンテーションによる G 中での出次数のいずれか小さい方となる。このように $P_1(G, W, S)$

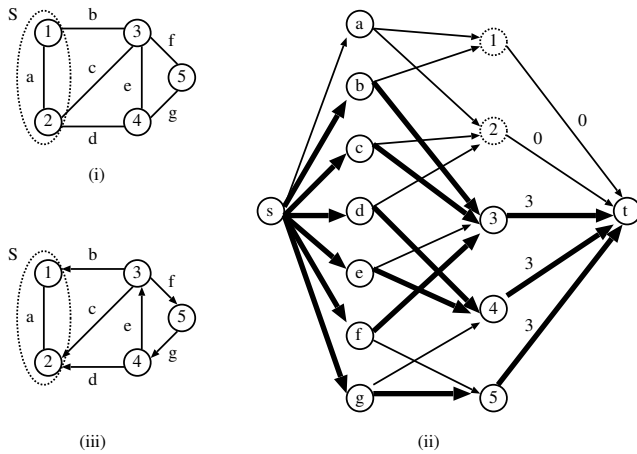


図 1 (i) グラフ G と集合 $S = \{1, 2\}$; (ii) 構成されたネットワーク $\mathcal{N}_1(G, 2, \{1, 2\})$ と最大フロー; (iii) 最大フローに対応する G のオリエンテーション. ここで辺 $a = \{1, 2\}$ は任意に方向付けしてよい.

Fig. 1 (i) A graph G and a set $S = \{1, 2\}$; (ii) The constructed network $\mathcal{N}_1(G, 2, \{1, 2\})$ and a maximum flow; (iii) An orientation of G corresponding to the maximum flow, where the direction of the edge $a = \{1, 2\}$ can be determined arbitrarily.

の最適値は、 $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ に対して最大フロー問題を解くことにより得られる. 例として、図 1 (ii) 中では、最大フロー (大きさ 6) を太線で示してあり、それに対応する G のオリエンテーション ($P_1(G, W, S)$ の解を与える) が図 1 (iii) に示してある.

計算時間について述べる. ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ の枝数 m_1 について $m_1 = O(n_1^{16/15-\epsilon})$ であるので、[17] に示された最大フローを求めるアルゴリズムを利用できる. このアルゴリズムの計算時間は $O(n_1 m_1)$ であり、ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ においては、 $n_1 = O(m)$ であり $m_1 = O(m)$ であるので、 $O(m^2)$ 時間で最大フローを求めることができる. 別の最大フローを求めるアルゴリズム [13] も利用でき、この計算時間は $O(\min\{n_1^{2/3}, m_1^{1/2}\} m_1 \log(n_1^2/m_1) \log U_1)$ である. ここで U_1 はネットワーク中にある枝が持つ容量の最大値である. ネットワーク $\mathcal{N}_1(G, W, S)$ 中の枝の容量の最大値は $O(W)$ であるので、このアルゴリズムを用いた場合の計算時間は $O(m^{1.5} \log m \log W)$ になる. まとめると、 $P_1(G, W, S)$ は、 $O(m^{1.5} \min\{m^{0.5}, \log m \log W\})$ 時間で厳密解を得られることになる. □

最大フローの最適性により、最適オリエンテーションについての特徴が分かる. 次の補題は、ある種の道についての観察に基づいている: もし $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から、 $V \setminus S$ 中の W -light である頂点への有向道が存在する場合、その有向道の辺の向きを反転させることにより、 $P_1(G, W, S)$ に対するより良いオリエンテーションを得ることができる.

補題 4 Λ が $P_1(G, W, S)$ に対する最適オリエンテーショ

ンである時、またその時に限り、 $\Lambda(G)$ において、 $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から $V \setminus S$ 中の W -light である頂点への有向道は存在しない.

証明 (\Leftarrow) 対偶について証明する. すなわち、もし Λ が最適でなかったら、 $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から $V \setminus S$ 中の W -light である頂点への有向道が存在することを示す. 最適オリエンテーション Λ^* を考える. オリエンテーション Λ は最適でない、つまり $\Lambda \neq \Lambda^*$ であるので、 $\Lambda(G)$ 中には、 $\Lambda^*(G)$ 中とは向きの異なる有向道 P が存在するはずである. ここで、 $\Lambda(G)$ 中の P の始点を u 、終点を v とする. ここで P は、単に 1 本の辺かもしれないことに注意する. 簡単のために、 Λ と Λ^* の違いは、 P の部分だけだと仮定する. 最適オリエンテーション Λ^* は、 Λ 中での P の辺の向きを逆にすることで得られるので、 $d_{\Lambda^*}^+(u) = d_{\Lambda}^+(u) - 1$ と $d_{\Lambda^*}^+(v) = d_{\Lambda}^+(v) + 1$ という関係があることが分かる.

オリエンテーション Λ は最適ではない、つまり $\sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(v)\} < \sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda^*}^+(v)\}$ であるので、次の 2 つの条件 (i)(ii) のうちの 1 つが成立している: (i) $u, v \in V \setminus S$, $d_{\Lambda}^+(u) \geq W+2$ かつ $d_{\Lambda}^+(v) \leq W$; (ii) $u \in S, v \in V \setminus S$, かつ $d_{\Lambda}^+(v) \leq W$. (もし u と v の両方が S に属している場合は、 P の辺の向きを逆にしたとしても $\sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(v)\}$ の値は変化しない.) よって $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から $V \setminus S$ 中の W -light である頂点への有向道が存在すると言える. オリエンテーション Λ と Λ^* が、2 個以上の道について違う場合の議論も同様である.

(\Rightarrow) 先ほどと同様に、対偶を証明する. すなわち、もし $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から $V \setminus S$ 中の W -light である頂点への有向道があったとすると、 Λ は最適でないことを示す. そのような有向道の始点と終点をそれぞれ u と v とする. ここで、その有向道の向きを逆にして、残りの部分は Λ と同じであるようなオリエンテーション Λ' について考える. すると、上記の (\Leftarrow) 部分の証明と同じように、 $d_{\Lambda'}^+(v) = d_{\Lambda}^+(v) + 1$ かつ $d_{\Lambda'}^+(u) = d_{\Lambda}^+(u) - 1$ となる. ここで、 u が $V \setminus S$ に属し、かつ $(W+2)$ -heavy である場合には、 $\min\{W+1, d_{\Lambda'}^+(u)\} = \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(u)\} = W+1$ となる. さらに $\Lambda(G)$ 中で v は W -light であるので、 $d_{\Lambda}^+(v) < d_{\Lambda'}^+(v) \leq W+1$ である. これにより、 $\sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda'}^+(v)\} < \sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(v)\}$ が言える. すなわち Λ は最適ではない. □

最後に g_1 が、非減少劣モジュラ関数であることを示す.

補題 5 g_1 は非減少劣モジュラ関数である. すなわち g_1 は、以下の 2 つの性質を満たす: (非減少性) 任意の $S \subseteq V$ と $i \in V \setminus S$ に対して、 $g_1(S \cup \{i\}) - g_1(S) \geq 0$ である; (劣モジュラ性) 任意の $S, T \subseteq V$ に対して、

$g_1(S) + g_1(T) \geq g_1(S \cap T) + g_1(S \cup T)$ である.

証明 任意の互いに素な2個の集合 $S, S' \subseteq V$ について,

$$\begin{aligned} & \alpha(S, S') \\ &= \min_{\Lambda \in \text{Opt}O(P_1(G, W, S))} \left\{ \sum_{v \in S'} \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(v)\} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

と定義する. ここで, $\text{Opt}O(P_1(G, W, S))$ は $P_1(G, W, S)$ の最適オリエンテーション全てを含む集合である. まず, 任意の $S, S' \subseteq V$ について, 等式

$$g_1(S \cup S') - g_1(S) = |S'| \cdot (W+1) - \alpha(S, S') \quad (3)$$

が成立することを示す. 値 $\alpha(S, S')$ を実現する G のオリエンテーションを $\Lambda_{S, S'}$ とする. 補題 4 と $\Lambda_{S, S'}$ の $P_1(G, W, S)$ に対する最適性により, $V \setminus S$ 中の $(W+2)$ -heavy である頂点または S 中の頂点から, $\Lambda_{S, S'}(G)$ 中の W -light である頂点への有向道は存在しないことが分かる. さらに, S' 中の頂点から $V \setminus (S \cup S')$ 中の W -light である頂点への有向道も存在しない. なぜならば, もしそのような有向道が存在すると, $\Lambda_{S, S'}$ が $\sum_{v \in S'} \min\{W+1, d_{\Lambda}^+(v)\}$ を最小化するという仮定に矛盾するからである. これらの事実により, $\Lambda_{S, S'}$ が $P_1(G, W, S \cup S')$ に対する最適オリエンテーションであることが分かる. よって, 以下の等式を得る.

$$\begin{aligned} g_1(S) &= |S| \cdot (W+1) + \sum_{v \in V \setminus S} \min\{W+1, d_{\Lambda_{S, S'}}^+(v)\} \\ &= (|S \cup S'| - |S'|) \cdot (W+1) \\ &\quad + \sum_{v \in V \setminus (S \cup S')} \min\{W+1, d_{\Lambda_{S, S'}}^+(v)\} \\ &\quad + \sum_{v \in S'} \min\{W+1, d_{\Lambda_{S, S'}}^+(v)\} \\ &= g_1(S \cup S') - |S'| \cdot (W+1) \\ &\quad + \sum_{v \in S'} \min\{W+1, d_{\Lambda_{S, S'}}^+(v)\} \end{aligned}$$

以上により (3) が示された. ただし, ここで最初の等式は $\Lambda_{S, S'}$ の最適性により導き出され, 2 個目の等式は, S と S' が互いに素である事実に基づいている. そして, (2) と (3) を組み合わせることにより, 任意の $i \in V \setminus S$ に対して $g_1(S \cup \{i\}) - g_1(S) = (W+1) - \alpha(S, \{i\}) \geq 0$ が成立すること, すなわち, g_1 の非減少性が示される.

次に g_1 の劣モジュラ性について示す. 劣モジュラ性の定義は, 次のようにも説明される: 任意の $S \subseteq V$ と $i, j \in V \setminus S$ に対して以下が成立する.

$$\begin{aligned} & g_1(S \cup \{i\}) - g_1(S) \\ & \geq g_1(S \cup \{i, j\}) - g_1(S \cup \{j\}) \end{aligned} \quad (4)$$

上記の (3) により, 以下の3個の等式を得られる.

$$g_1(S \cup \{i\}) - g_1(S) = (W+1) - \alpha(S, \{i\})$$

$$g_1(S \cup \{j\}) - g_1(S) = (W+1) - \alpha(S, \{j\})$$

$$g_1(S \cup \{i, j\}) - g_1(S) = 2(W+1) - \alpha(S, \{i, j\})$$

これらを組み合わせることで, 以下を得る.

$$\begin{aligned} & g_1(S \cup \{i\}) - g_1(S) + g_1(S \cup \{j\}) - g_1(S \cup \{i, j\}) \\ &= -\alpha(S, \{i\}) - \alpha(S, \{j\}) + \alpha(S, \{i, j\}) \end{aligned}$$

この式と α の定義により, $\alpha(S, \{i\}) + \alpha(S, \{j\}) \leq \alpha(S, \{i, j\})$ が成立することが容易に分かる. よって, 条件 (4), すなわち g_1 の劣モジュラ性が示された. \square

3. MIN W -LIGHT の近似困難性

本節では MIN W -LIGHT の近似困難性を示す. 以下の証明で用いる B -SET COVER 問題は SET COVER 問題において, インスタンスに含まれる各部分集合が高々 B 個しか要素を含まないように制限した問題である [5], [12], [20]. 近似不可能性に関する次の定理を MIN W -LIGHT に対して示すことができる.

定理 6 任意の固定された各 $W \geq 1$ について, もし MIN W -LIGHT に対する多項式時間 f -近似アルゴリズムが存在するならば, $(W+1)$ -SET COVER に対する多項式時間 f -近似アルゴリズムも存在する.

証明 $(W+1)$ -SET COVER の判定問題版を MIN W -LIGHT の判定問題版に帰着する. ここで $(W+1)$ -SET COVER の判定問題版とは, 台集合 $U = \{1, 2, \dots, n\}$ と U の部分集合 $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq U$ の族 \mathcal{F} (ただし各 S_i について $|S_i| \leq W+1$), 正の整数 k が与えられ, $|\mathcal{F}'| \leq k$ かつ $\bigcup_{S_i \in \mathcal{F}'} S_i = U$ となるような \mathcal{F} の部分族 \mathcal{F}' が存在するかどうかを問う問題である. また, MIN W -LIGHT の判定問題版とは, 入力グラフ G と正の整数 k が与えられ, W -light である頂点数が高々 k となるような G のオリエンテーションが存在するかどうかを問う問題である. 以下では, 簡単のために, “の判定問題版” を省略し, 単に “ $(W+1)$ -SET COVER” と “MIN W -LIGHT” と呼ぶ.

$(W+1)$ -SET COVER のインスタンス I から, MIN W -LIGHT のインスタンス G を構成する (図 2). まず, 台集合 U と族 \mathcal{F} に対応する2つの頂点集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ と $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ を用意する. さらに完全グラフ K_{2W+3} を用意し, この頂点を $v_1, v_2, \dots, v_{2W+3}$ とする. 辺として, まず各 $i \in U$ と $i \in S_j$ となっている各 j について $\{u_i, s_j\}$ を作る. 次に各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, W 本の辺 $\{u_i, v_l\}$ ($l \in \{1, 2, \dots, W\}$) を作る. 最後に各 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ について, もし $|S_j| \leq W$ であるならば, $W+1-|S_j|$ 本の辺 $\{s_j, v_l\}$ ($l \in \{1, \dots, W+1-|S_j|\}$) を作る. 以上がグラフ G の構成方法である. ここで, 各頂点 s_j の次数は $W+1$ となっている.

以上の帰着の正しさは, 以下の補題 7 において示す. \square

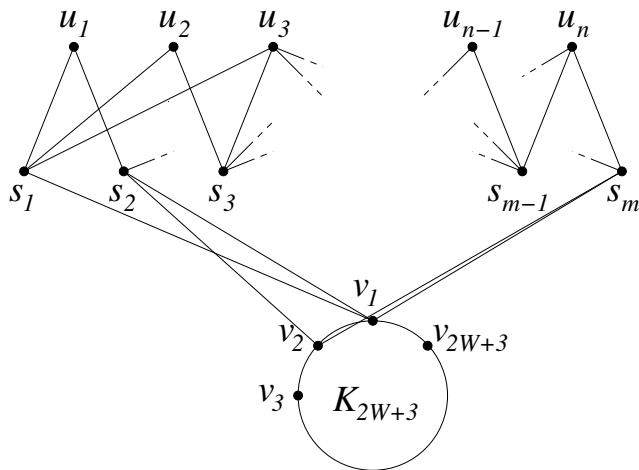


図 2 $(W+1)$ -SET COVER から MIN W -LIGHT への帰着. 見やすさのために $\{u_i, v_k\}$ の型の辺は記載していない.

Fig. 2 Reduction from $(W+1)$ -SET COVER to MIN W -LIGHT. For clarity, edges of the form $\{u_i, v_k\}$ are not shown.

補題 7 W -light である頂点が高々 k 個となるようなオリエンテーションをグラフ G が持つ時, かつその時に限り, $(W+1)$ -SET COVER のインスタンス I に対する答えは yes となる.

証明 (\Rightarrow) オリエンテーション Λ により, $\Lambda(G)$ 中の W -light である頂点の集合が L となり, $|L| \leq k$ であるとする. ここで, L は K_{2W+3} の頂点を含まないと仮定する. なぜならば, もし K_{2W+3} の頂点を含んでいると仮定すると K_{2W+3} 内の辺のオリエンテーションを主張 1 で与えられるオリエンテーションに置き換えることで, K_{2W+3} の全頂点の出次数を $W+1$ にすることが出来て, W -light である頂点数を減らすことが可能だからである. また, 一般性を失わずに, K_{2W+3} 内の頂点に外部から接続している辺については, Λ 中では K_{2W+3} の方に向き付けされていると仮定できる.

ここで, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cap L \neq \emptyset$ と仮定する. すなわち, $u_i \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cap L$ となる頂点 u_i が存在するとする. この u_i と K_{2W+3} の間の W 本の辺は, K_{2W+3} の方に向き付けられるので, この時点で u_i の出次数は W となり, u_i と $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ の各頂点の間の辺は u_i の方に向き付けられることになる. この u_i と $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ 間の辺を 1 本だけ向きを変えることにより, u_i を $(W+1)$ -heavy にすることができる. このような手続きを, そういった頂点 u_i 全てに適用することにより, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ をすべて $(W+1)$ -heavy にすることができる. よって, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cap L = \emptyset$ かつ $L \subseteq \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ と仮定して良い. この仮定のもとでは, 各 $u_i \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ について, 1 本以上の辺 $\{u_i, s_j\}$ が (u_i, s_j) と向き付けられている. 頂点 s_j の次数は $W+1$ なので, このことは s_j を $(W+1)$ -heavy には出来ないことを意味しており, s_j は L に属している. この状況を, 要素 $i \in U$ が \mathcal{F} 中の S_j によ

りカバーされることに対応すると考える. よって, L に基づいて, $(W+1)$ -SET COVER のインスタンス I に対する, 大きさ高々 k の集合カバーを得られる.

(\Leftarrow) インスタンス I に対する答えが yes と仮定する. すなわち, 族 \mathcal{F} の部分族 \mathcal{F}' が, $|\mathcal{F}'| \leq k$ かつ $\bigcup_{S_i \in \mathcal{F}'} S_i = U$ であると仮定する. この \mathcal{F}' に基づいて, G のオリエンテーション Λ を次のように構成する. まず, K_{2W+3} 内の辺については, 主張 1 で与えられるオリエンテーションを適用することで, K_{2W+3} 中の全ての頂点の出次数が $W+1$ となる. そして, 各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, u_i と K_{2W+3} の間にある W 本の辺すべてを K_{2W+3} の方に向き付けする. また, 各 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, s_j と K_{2W+3} 間の $W+1 - |S_j|$ 本の辺すべてを K_{2W+3} の方に向き付けする. この時点で, 向きの決まっていない辺は $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ と $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ の間のものである. 各 u_i に対して, $i \in S_j$ となっている $S_j \in \mathcal{F}'$ を一つ選び, 辺 $\{u_i, s_j\}$ を (u_i, s_j) と向き付けする. ここで, $\bigcup_{S_i \in \mathcal{F}'} S_i = U$ であるので, そのような S_j が必ず一つは存在することが言える. 最後に, まだ向きが決まっていない辺 $\{u_i, s_j\}$ については (s_j, u_i) と向き付けする.

以上により構成された Λ により, K_{2W+3} と $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{s_j : S_j \notin \mathcal{F}'\}$ に属する全ての頂点の出次数は $W+1$ である. また, $\{s_j : S_j \in \mathcal{F}'\}$ の頂点については, 出次数が高々 W である. つまり, $\Lambda(G)$ 中で W -light である頂点の数は, 高々 k である. \square

B -SET COVER に関する既知の近似困難性, すなわち近似度の下界:

- 3-SET COVER : 100/99[5]
- 4-SET COVER : 53/52[5]
- B -SET COVER : $\ln B - O(\log \log B)$ [20]

を定理 6 とともに利用することで以下の系を得る.

系 8 MIN 2-LIGHT と MIN 3-LIGHT に対する, それぞれ近似度 100/99 と 53/52 を持つ多項式時間近似アルゴリズムは存在しない. さらに, 十分大きな W に対して, MIN W -LIGHT に対する多項式時間 $(\ln(W+1) - O(\log \log W))$ -近似アルゴリズムは存在しない.

4. MAX W -HEAVY の近似困難性

本節では MAX W -HEAVY の近似困難性を示す.

定理 9 任意の固定された $W = \Omega(n^{1/3})$ について, MAX W -HEAVY に対する多項式時間 $(n/W)^{1/2-\epsilon}$ -近似アルゴリズムは存在しない. ここで, $\epsilon > 0$ は任意の定数である.

証明 MAXIMUM INDEPENDENT SET 問題から MAX W -HEAVY 問題への帰着を行う.

$G = (V, E)$ を $\Delta \leq W$ を満たすような, MAX INDEPENDENT SET のインスタンスとする. この条件 $\Delta \leq W$ が常に成立することを保証するために, 以下では $W \geq |V|$ を仮

定する。MAX W-HEAVY のインスタンス $G' = (V', E')$ は以下のように構成される (図 3)。ある正の整数 h に対して、グラフ G の h 個のコピー $G_i = (V_i, E_i)$ ($i = 1, 2, \dots, h$) を用意する。この h の値については、後で決定する。各頂点 $v \in V$ に対して、 V_i 中の v のコピーを $v^{(i)}$ で表す。また、頂点 $\{u_1, u_2, \dots, u_{2W+1}\}$ からなる完全グラフ K_{2W+1} も用意する。このように G' の頂点集合 V' を $\{u_1, \dots, u_{2W+1}\} \cup \bigcup_{i=1}^h V_i$ とする。 V' 中の頂点数 $|V'|$ は $|V'| = h \cdot |V| + 2W + 1$ である。次に、各 $i \in \{1, \dots, h\}$ と $v \in V$ に対して、 $v^{(i)}$ と u_j ($j = 1, 2, \dots, W - d(v)$) 間に $W - d(v)$ 本の辺を用意し、これを $E^{(i,v)}$ で表す。そして、辺集合 $E(G')$ は、 $\bigcup_{1 \leq i \leq h} E_i, E(K_{2W+1}), \bigcup_{1 \leq i \leq h, v \in V} E^{(i,v)}$ の和集合とする。よって、 G_1, G_2, \dots, G_h 中の各頂点の次数は W となる。もし h の大きさが、 G のサイズの多項式で抑えられるならば、 G' の構成は多項式時間で実行できる。 G に対する MAXIMUM INDEPENDENT SET の最適解の値を $OPT(G)$ で表し、 G' に対する MAX W-HEAVY の最適解の値を $OPT'(G')$ で表すことにする。 $n = |V(G)|$ とする。 $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ でない限り、MAXIMUM INDEPENDENT SET に対しては、多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$ -近似アルゴリズムが存在しないことが知られている [23] (ここで ε は任意の正定数である)。

後で示される補題 11 により、次の 2 つの条件が成立している。

- (i) もし $OPT(G) \geq k$ ならば $OPT'(G') \geq hk + 2W + 1$ 。
- (ii) もし $OPT(G) < k/n^{1-\varepsilon}$ ならば、任意の正定数 ε に対して $OPT'(G') < hk/n^{1-\varepsilon} + 2W + 1$ 。

上記 (ii) の $OPT'(G')$ の上界について、以下のように理解される。

$$\begin{aligned} & OPT'(G') \\ & < \frac{hk}{n^{1-\varepsilon}} + 2W + 1 \\ & = \frac{hk + 2W + 1}{n^{1-\varepsilon}} \left(1 + \frac{(n^{1-\varepsilon} - 1)(2W + 1)}{hk + 2W + 1} \right) \end{aligned}$$

ここで $h = Wn$ と設定すると、以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{(n^{1-\varepsilon} - 1)(2W + 1)}{hk + 2W + 1} < \frac{3Wn^{1-\varepsilon}}{Wnk} < 3$$

つまり、 $OPT'(G') < (hk + 2W + 1)/(n^{1-\varepsilon}/4)$ が言える。 G' 中の頂点数 $|V'|$ は $hn + 2W + 1 = Wn^2 + 2W + 1$ であるので、 ε' を適切に選択することで、 $n^{1-\varepsilon}/4 = (|V'|/W)^{1/2-\varepsilon'}$ となる。すなわち、近似下界の $(|V'|/W)^{1/2-\varepsilon'}$ を得たことになる。□

上の定理により、以下の系を得る。文献 [2] により多項式時間 $(W + 1)$ -近似アルゴリズムが提案されているので、この系はほぼ厳密な近似下界を与えていると言える。

系 10 $W = \Theta(n^{1/3})$ について、MAX W-HEAVY に対する多項式時間 $W^{1-\varepsilon}$ -近似アルゴリズムは存在しない。こ

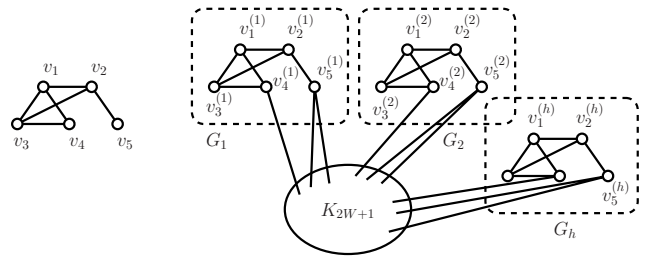


図 3 MAXIMUM INDEPENDENT SET から MAX W-HEAVY への帰着。与えられたグラフ G が左図で、構成されるグラフ G' が右図。

Fig. 3 Reduction from MAXIMUM INDEPENDENT SET to MAX W-HEAVY. The given graph G is on the left and the constructed graph G' is on the right.

ここで ε は任意の正定数である。

証明 適当な定数 $c \geq 1$ について $W = cn$ とすると、定理 9 の証明中の帰着における G' の頂点数 $|V'|$ は $cn^3 + 2cn + 1$ になる。これにより、 $W = \Theta(|V'|^{1/3})$ となり、適切な ε' を選択することにより、近似ギャップが $n^{1-\varepsilon}/4 = W^{1-\varepsilon'}$ になる。□

補題 11 $OPT(G) \geq k$ である時、かつその時に限り $OPT'(G') \geq hk + 2W + 1$ である。

証明 (\Rightarrow) G がサイズ k 以上の独立集合 $I \subseteq V$ を持つと仮定し、 G' のオリエンテーション Λ を構成する。まず、 K_{2W+1} 内の辺を主張 1 に従って向き付けする。これにより、 K_{2W+1} 中の頂点すべての出次数が W になる。さらに $i = 1, 2, \dots, h$ に対して、 G_i 中で $v \in I$ かつ $v' \notin I$ であるような辺 $\{v^{(i)}, v'^{(i)}\}$ を $v^{(i)}$ から $v'^{(i)}$ へ向かうように向き付けする (I の独立性から、この手続きは常に可能であることが言える)。そして、 G_i 中の他の辺は、任意の向きに向き付けする。最後に、 G_i ($i = 1, 2, \dots, h$) と K_{2W+1} 間の辺は、 G_i から K_{2W+1} へ向かうように向き付けする。

もし $v \in I$ であるならば、 $\Lambda(G)$ 中では、全ての $i = 1, 2, \dots, h$ について、 $v^{(i)}$ の出次数は W になる。また、 K_{2W+1} 中の全頂点の出次数が W なので、 $\Lambda(G)$ 中で W -heavy である頂点の数は少なくとも $|I| \cdot h + (2W + 1) \geq hk + (2W + 1)$ である。これにより、 $OPT'(G') \geq hk + (2W + 1)$ であることが言えた。

(\Leftarrow) Λ を、 W -heavy である頂点数が少なくとも $hk + 2W + 1$ となるような G' のオリエンテーションとし、この W -heavy である頂点の集合を S で表す。ここで、 $V(K_{2W+1}) \subseteq S$ と仮定する。なぜならば、もしそうでないならば、 W -heavy である頂点数を減らすことなしに、 K_{2W+1} 内の辺に対するオリエンテーションを主張 1 により与えられるものに置き換える (K_{2W+1} の全頂点が W -heavy になる) ことが出来るからである。この仮定により $|S \setminus V(K_{2W+1})| \geq hk$ が成立し、さらに少なくとも 1 個以上の G_i が k 個以上の W -heavy である頂点を含む、

すなわち $|V_i \cap S| \geq k$ となることが言える。 G' の構成法により、 V_i 中の各頂点は正確に W 本の辺と接続している。 よって、 $V_i \cap S$ に属する頂点 v に接続する全ての辺は、 Λ 中では、 v から出る方向に向き付けられなければならない。 このことは、 $V_i \cap S$ 中の頂点の組で隣接しているものではなく、 $V_i \cap S$ が G_i 中で独立集合となっていることを意味する。 また、 $V_i \cap S$ に対応する G 中の頂点集合も独立集合となっており、結果として、 $OPT(G) \geq |V_i \cap S| \geq k$ を得る。 \square

上記の定理9の証明は、MAXIMUM INDEPENDENT SETの困難さに依存している。この証明中で重要なのが、MAXIMUM INDEPENDENT SETのインスタンスの最大回数に関する条件 $W \geq \Delta$ である。MAXIMUM INDEPENDENT SETは、 $\Delta \geq 3$ のとき \mathcal{NP} 困難であり、上記の証明は任意の固定された $W \geq 3$ に対する MAX W -HEAVY の \mathcal{NP} 困難性を示している。MAX W -HEAVY の \mathcal{NP} 困難性自体は文献 [2] でも与えられているので、上記の証明は近似困難性を与えるものではあるが、既知の \mathcal{NP} 困難性を示す別の証明にもなっていると言える。しかしながら、この証明はMAXIMUM INDEPENDENT SETの困難性に基づいているため、 $W \geq 3$ の場合のみに有効で、 $W = 2$ の場合についての知見を何も与えておらず、MAX 2-HEAVY の計算複雑さについては未知である。

5. おわりに

本稿ではMIN W -LIGHTとMAX W -HEAVYの近似(不)可能性について、いくつかの新しい結果を示した。興味深い未解決問題としては、MIN 1-LIGHTとMAX 2-HEAVYが \mathcal{NP} 困難かどうか分からないことが挙げられる。本稿で扱っている問題は、重みなしグラフについて定義されている。自然な拡張として頂点または辺(あるいは両方)が重みを持っている問題を考えることができる。これらの問題においては、各頂点に対して、頂点の重み、または外向きの辺の重み、あるいはその合計を出次数として定義することになり、一般的にはアルゴリズムを設計することが困難になる。

謝辞 本研究は科研費 23500020, 25104521, 25330018, 26330017, 26540005 と京都大学次世代研究者育成支援事業「白眉プロジェクト」の助成を受けたものである。

参考文献

[1] Asahiro, Y., Jansson, J., Miyano, E., and Ono, H.: Upper and lower degree bounded graph orientation with minimum penalty. In Proc. of CATS 2012, CRPIT Series, Vol. 128, 139–146, 2012.

[2] Asahiro, Y., Jansson, J., Miyano, E., and Ono, H.: Graph orientations optimizing the number of light or heavy vertices. In Proc. of ISCO 2012, LNCS, Vol. 7422, 332–343, 2012.

[3] 朝廣雄一, ジェスパージェンソン, 宮野英次, 小野廣隆: 次数制約のあるグラフ有向化問題の近似について. 電子情報

通信学会コンピュータリション研究会, 信学技報, Vol.113, No.371, COMP2013-58, pp.123-130, 2013年12月.

[4] Asahiro, Y., Jansson, J., Miyano, E., Ono, H., and Zenmyo, K: Approximation algorithms for the graph orientation minimizing the maximum weighted outdegree. Journal of Combinatorial Optimization **22**(1) 78–96, 2011.

[5] Chlebik, M. and Chlebikova, J.: Complexity of approximating bounded variants of optimization problems. Theor. Comput. Sci. **354**(3), 320–338, 2006.

[6] Chrobak, M. and Eppstein, D.: Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. Theoretical Computer Science **86**(2), 243–266, 1991.

[7] Chung, F. R. K., Garey, M. R., and Tarjan, R. E.: Strongly connected orientations of mixed multigraphs. Networks **15**(4), 477–484, 1985.

[8] Dinur, I. and Safra S.: On the hardness of approximating minimum vertex cover. Annals of Mathematics **162**(1), 439–485, 2005.

[9] Ebenlendr, T., Krčál, M., and Sgall, J.: Graph balancing: A special case of scheduling unrelated parallel machines. Algorithmica **68**(1), 62–80, 2014.

[10] Frank, A. and Gyárfás, A.: How to orient the edges of a graph? Combinatorics Volume I, North-Holland, 353–364, 1978.

[11] Gabow, H. N.: Upper degree-constrained partial orientations. In Proc. of SODA 2006, 554–563, 2006.

[12] Garey, M. and Johnson, D.: Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Company, New York, 1979.

[13] Goldberg, A. V. and Rao, S.: Beyond the flow decomposition barrier, Journal of the ACM, **45**(5), 783–797, 1998.

[14] Hakimi, S. L.: On the degrees of the vertices of a directed graph, Journal of the Franklin Institute **279**(4), 290–308, 1965.

[15] Landau, H. G.: On dominance relations and the structure of animal societies: III The condition for a score structure, Bulletin of Mathematical Biophysics **15**(2), 143–148, 1953.

[16] Nash-Williams, C. St. J. A.: On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs. Canadian Journal of Mathematics **12**(4), 555–567, 1960.

[17] Orlin, J. B.: Max flows in $O(nm)$ time, or better. In Proc. of STOC 2013, 765–774, 2013.

[18] Robbins, H. E.: A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control. The American Mathematical Monthly **46**(5), 281–283, 1939.

[19] Schrijver, A.: Combinatorial Optimization, Springer, 2003.

[20] Trevisan, L.: Non-approximability results for optimization problems on bounded degree instances, In Proc. of STOC 2001, 453–461, 2001.

[21] Venkateswaran, V.: Minimizing maximum indegree, Discrete Applied Mathematics, **143**(1-3), 374–378, 2004.

[22] Wolsey, L. A.: An analysis of the greedy algorithm for the submodular set covering problem. Combinatorica **2**(4), 385–393, 1982.

[23] Zuckerman, D.: Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number. Theory of Computing **3**(1), 103–128, 2007.