

OBDD における入力反転エッジの応用に関する研究*

杉山友朗†

沼津工業高等専門学校専攻科 制御情報システム工学専攻†

鈴木康人‡

沼津工業高等専門学校 制御情報工学科‡

1 緒言

本研究では OBDD と呼ばれる論理関数を表すグラフ表現について、より効率的な構造を構成する方法について検討した。

OBDD とは ordered binary decision diagram の略称で、二分順序決定ダイアグラムと訳され、論理関数を表すグラフ表現である。OBDD では非終端ノードが命題変数を、終端ノードが論理関数の真偽値を表しており、エッジにはラベルとして、0 ないし 1 が記載されている。論理式を表した OBDD と、各命題変数への真偽の割り当てが与えられると、与論理式の実偽を計算することができる。

OBDD はモデル検査法で論理式の実偽を判定するために用いられる。OBDD はソフトウェアだけでなく、回路などのハードウェアなどの検証にも使われており、信頼性評価のための強力な手段である [1]。

OBDD をより効率的に表す手法として、1991 年、湊らによって、上のノードの実偽に応じて下の 0 エッジと 1 エッジを交換する「入力反転エッジ」が提案された(文献 [2])。入力反転エッジを導入することで、エッジの行き先は同じでラベルだけ異なるようなノードがあったとき、そのノードを 1 つにまとめることができる。

どのような変数順序にすることが OBDD を最も簡潔に表すかという問題は NP 完全であることが知られている [1]。しかし、条件を限定した場合、変数順序を決定できる場合があり、本研究ではその条件について報告する。

2 OBDD

OBDD とは Ordered Binary Decision Diagram の略称で、二分順序決定ダイアグラムという論理関数を表すグラフ表現である。OBDD はノードに変数を、エッジに変数の真偽値を割り当てている。ただし、終端ノードには論理関数の真偽値が割り当てられる。OBDD の効率の評価はエッジの総本数(サイズ)で定まる。

OBDD の大きさは、変数順序にも依存している。変数順序とは、変数の集合 $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ が与えられているとき、単射 $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ のことを指す。変数の数が n であるような二分順序決定木において、葉の一つ上のノードから順に同じ高さ i のノードには $\pi[i]$ という変数を割り当てたもので、一般的には $(\pi[1], \pi[2], \dots, \pi[n])$ と表す。

OBDD は変数順序によって構造が簡単にも複雑にもなることが知られている。

3 入力反転エッジ

入力反転エッジは文献 [2] で提案されている属性エッジで、このエッジを通った次のノードで“0”エッジと“1”エッジを交換することを表す。このセクションでは文献 [2] で言及されている内容について記載する。

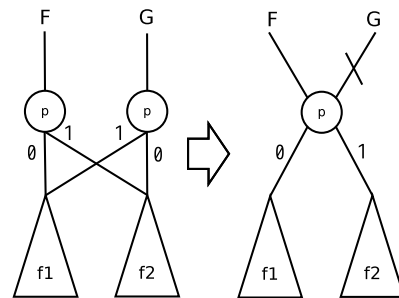


Fig.1 Input inverters.

グラフ上では Fig.1 のように入力反転エッジはエッジに斜線を入れることで表す。入力反転エッジを導入することで、エッジの行き先は同じでラベルだけ異なるようなノードがあったとき、そのノードを 1 つにまとめることができる。Fig.1 では F を通った後 p に 0 が割り当てられていると f_1 、1 が割り当てられていると f_2 に向かうが、G を通ると p に 0, 1 が割り当てられているとそれぞれ f_2, f_1 に向かう。

4 研究結果

4 変数の OBDD に対して一番サイズが大きくなる場合は、論理関数が 2bit 比較器である $((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2))$ 場合である。この OBDD に対して入力反転エッジを用いると、そのサイズは小さくできる。そのため、本研究では、まず 3 変数までと一部の 4 変数の OBDD に注目し、入力反転エッジと同値演算子の関係に注目した。

その結果、以下の結果を得た。

事実 1. 入力反転エッジの本数が増えてもサイズが大きくなる事例が存在する。

(証明) 以下の Fig.2 は論理式 $(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)$ の変数順序 (b_2, b_1, a_2, a_1) (左) と (b_2, a_2, b_1, a_1) (右) に対する入力反転エッジ付き OBDD であり、その図より明らかである。

* A Research for an Application of Input Inverters in OBDDs

† Tomoaki SUGIYAMA, Numazu College of Technology a Advanced Engineering Course

‡ Yasuhiro SUZUKI, Numazu College of Technology Department of Control and Computer engineering

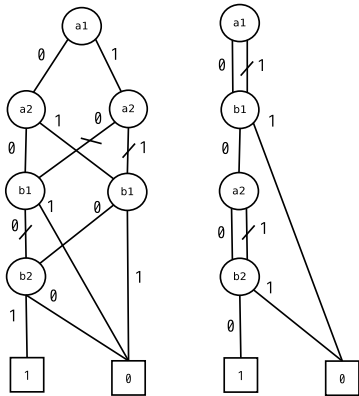


Fig.2 $(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)$, variable order (b_2, b_1, a_2, a_1) (left), (b_2, a_2, b_1, a_1) (right)

上の事実から入力反転エッジを多くしてもサイズが小さくなるわけではないことが分かる。

定理 2. 入力反転エッジが導入できる OBDD は、同値演算子が論理関数に存在する。

(証明) 以下の OBDD(左) は入力反転エッジを構成できる OBDD である。

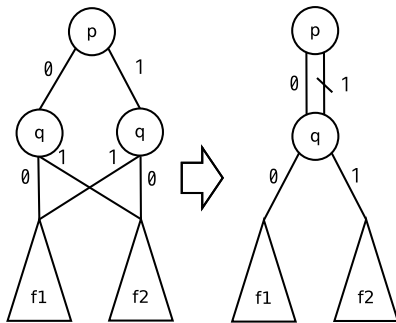


Fig.3 A typical OBDD which input inverters can apply.

論理式 $(\neg p \rightarrow ((\neg q \rightarrow f_1) \wedge (q \rightarrow f_2)))$
 $\wedge (p \rightarrow ((q \rightarrow f_1) \wedge (\neg q \rightarrow f_2)))$
 をまとめると $= (f_1 \vee (\neg p \leftrightarrow q)) \wedge (f_2 \vee (p \leftrightarrow q))$
 となる。

事実 3. 入力反転エッジは元となる OBDD を根から評価すると生成できない事例がある。

(証明) 論理関数 $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ の変数順序が (z, x, y) の場合 (Fig.4(左)) が該当する。Fig.4(右) は葉から評価することによって入力反転エッジを生成している。

定理 4. 同値演算子が出現する論理関数と同値な変数が隣接する変数順序は入力反転エッジ付きの OBDD が構成できる。

(証明) 全ての 3 変数 OBDD と 4 変数の 2bit 比較器に

ついて、入力反転エッジの構成の有無を確認した。Fig.5 は 2bit 比較器の例である。

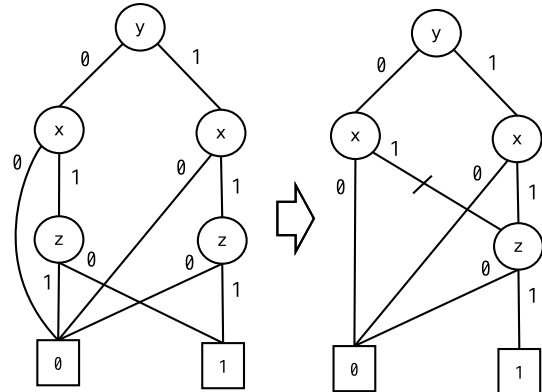


Fig.4 OBDD which input inverters apply $(x \wedge (y \leftrightarrow z))$, variable order (z, x, y) .

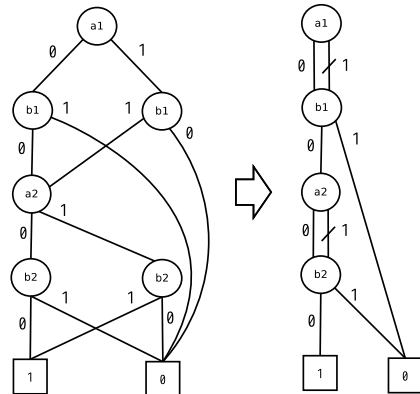


Fig.5 OBDD which input inverters apply $((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2))$, variable order (b_2, a_2, b_1, a_1) .

5 結言

本研究により、同値である変数が隣同士になるような変数順序にすると入力反転エッジ付きの OBDD の効率が良くなる、ということが分かった。本研究の提案は 3 変数と 4 変数の一部までしか確認できていないので、今後の課題は 4 変数以上の場合を検討することである。

参考文献

- [1] Edmund M. Clarke Jr., Orna Grumberg, and Doron A. Peled. Model Checking. The MIT Press, 1999.
- [2] 湊 真一, 石浦 菜岐佐, 矢島 脩三. 論理関数の共有二分決定グラフによる表現とその効率的処理手法. 情報処理学会論文誌, 32(1):77-85. 1991-01-15