

5 状態セルオートマトン上でのフィボナッチ数列の実時間生成アルゴリズム

上川 直紀^{1,a)} 梅尾 博司^{2,b)}

概要: セラ・オートマトン (CA) は J. von Neumann により考案された並列計算モデルの一つであり、現在では、複雑系などの多くの分野で研究がなされている。CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され、セルは自らと、隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に、自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない。しかしながら、この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし、CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ。本稿では、CA 上で扱われる問題の一つである数列生成問題について考察を行う。5 状態の CA で実現するフィボナッチ数列生成アルゴリズムを設計し、その正当性について考察を行う。

1. はじめに

セラ・オートマトン (CA) は J. von Neumann により考案された並列計算モデルの一つであり、現在では、複雑系などの多くの分野で研究がなされている。CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され、セルは自らと、隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に、自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない。しかしながら、この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし、CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ。

本稿では、CA 上で扱われる問題の一つである数列生成問題について考察を行う。Arisawa [1], Korec [7], Umeo and Kamikawa [9], [10], Kamikawa and Umeo [2], [3], [4] らは 1 次元 CA の左端のセルの内部状態で数列を表現する形式で、CA 上の数列生成について考察を行った。また、Umeo and Kamikawa [9], [10] が考察を行ったセラ・オートマトンのモデルは、セル間の通信量を 1 ステップにつき 1 ビットに制限されており、計算能力が最も小さいと考えられている。これらの研究では特定の非正則数列の生成について考察が行われているが、Kamikawa and Umeo [5] は内部状態数の少ない CA の数列生成能力について考察を行い、1 状態および 2 状態の CA で生成可能な数列を明らかにし、内部状態数について最適となる 3 状態の CA で実現する 3 つの数列生成アルゴリズムを明らかにした。

本研究では、5 状態の CA で実現するフィボナッチ数列生成アルゴリズム設計し、その正当性について考察を行う。

2. セラ・オートマトン上の数列生成問題

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。図 1 参照。

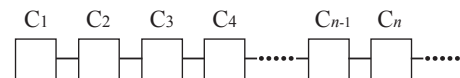


図 1 1 次元接続セラ・オートマトン

$n \geq 1$ とした場合、左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ。有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta, a)$ とする。それぞれ、以下の意味を持つ。

(1) Q は内部状態の有限集合である。

(2) δ は状態遷移関数であり、次のように定義される。

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(p, q, r) = s$ ($p, q, r, s \in Q$) は次の意味を持つ。

あるステップ t 時に、セル C_i の内部状態が q であり、左側のセルの内部状態が p 、右側のセルの内部状態が r であると、次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が s に遷移する。

左端のセル C_1 は左側からの入力として常に外界を表す特殊な状態 q が入力される。また静止状態 $q \in Q$ は隣接する左右のセルの状態が q の場合、 q を維持し続ける

¹ 大阪電気通信大学 メディアコミュニケーションセンター

² 大阪電気通信大学 情報工学科

a) naoki@mc2.osakac.ac.jp

b) umeo@cyt.osakac.ac.jp

という特徴を持つ。すなわち、遷移規則 $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ が定義される。

(3) 状態 $a \in Q$ は数列生成に使用する特別な状態である。

次に CA 上の数列生成問題の定義について述べる。 M を CA とし、 $\{t(n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とする。 $t = 0$ 時に C_1 以外の全てのセルの内部状態は静止状態 q をとる。 任意の自然数 n について、 $t = t(n)$ 時にセル C_1 の内部状態が内部状態 a を取ると、 M は実時間で、数列 $\{t(n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う。

次に、セル空間の計算状況を記述する記法を導入する。 i, j, n を自然数、 t を非負の整数とし、 $n \geq 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j, t \geq 0$ とする。 時刻 t 時のセル C_i の状態を S_i^t と表し、時刻 t 時の n 個のセルからなる計算状況を以下の様に表す。

$$t : S_1^t \dots S_n^t$$

また、時刻 t 時にセル C_i からセル C_j の $j - i + 1$ 個のセル全ての内部状態が s の場合、以下の様にまとめて記述する。

$$t : \overbrace{S \dots S}^{[i, j]}$$

次に演算記号として、 \Rightarrow を導入する。 \Rightarrow はセル空間の 1 ステップの変化を表す。 以下に使用例を示す。

$$t : \overbrace{S \dots S}^{[1, n]} \Rightarrow t + 1 : \overbrace{S \dots S}^{[1, n]}$$

また、遷移規則の簡略記法も導入する。 遷移規則 $\delta(w, x, y) = z$ の場合、省略して $w \ x \ y \rightarrow z$ と記述する。

3. フィボナッチ数列生成アルゴリズム

これまでの CA 上のフィボナッチ数列生成アルゴリズムについての研究は、Arisawa [1], Umeo and Kamikawa [9], Kamikawa and Umeo [5] らがあげられる。 Arisawa [1] はフィボナッチ数列を 2 線形時間で生成する CA のアルゴリズムを明らかにし、Umeo and Kamikawa [9] はセル間の通信量を 1 ステップにつき 1 ビットに制限した CA のモデル上のフィボナッチ数列生成アルゴリズムについて考察を行った。 Kamikawa and Umeo [5] は 5 状態の CA で実現するフィボナッチ数列生成アルゴリズム設計したが、その正当性については言及されていない。 本研究では Kamikawa and Umeo [5] のアルゴリズムを改良し、アルゴリズムの正当性についても考察を行う。

3.1 フィボナッチ数列生成アルゴリズム

M を 5 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b, c, d\}$ とする。 フィボナッチ数列は表 1 に示す遷移規則集合を持

表 1 フィボナッチ数列生成のための状態遷移規則

		Right State				
		q	a	b	c	d
Left State	q	q	q	c	q	
	a	b				
	b	q				
	c	q				
	d	b				
\$	q	q	a	a		

		Right State				
		q	a	b	c	d
Left State	q	d	q	q		
	a	b		d		
	b					
	c					
	d	a	a	a	a	
\$		a	a	q		

		Right State				
		q	a	b	c	d
Left State	q					
	a	c		d	d	
	b	c				
	c	c				
	d		b	b	b	
\$						

		Right State				
		q	a	b	c	d
Left State	q		d	c	c	
	a	c	a	a	a	
	b	c				
	c	c		d	d	
	d	b	d	d	d	
\$	a					

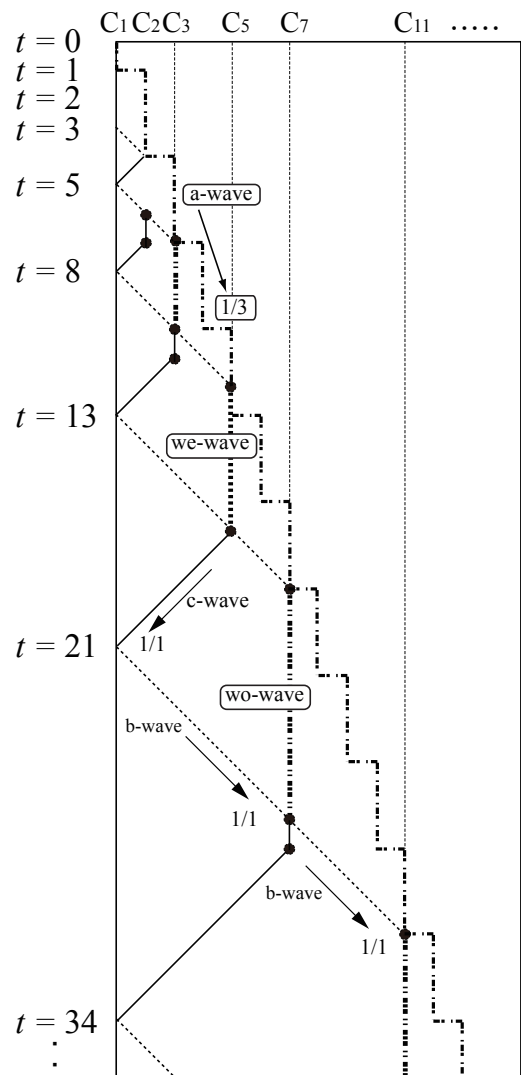


図 2 フィボナッチ数列生成のための時間・空間図式

つ M により生成される。 図 2 にフィボナッチ数列生成の為の時間・空間図を示す。

図 2 に示す時間・空間図は横軸にセル空間、縦軸に時刻とし、時間の経過におけるセル空間の変化を表す図である。 時間・空間図に示す線はセル空間上の状態の伝播であり、波

と呼ぶ。実時間でフィボナッチ数列を生成する為に、a 波、b 波、c 波、we 波、wo 波の 5 種類の波を用いる。

時刻 $t = 0$ 時に、セル C_2 で $d \ q \ q \rightarrow b$ が適用され、次のステップに内部状態が b に遷移する。時刻 $t = 1$ 時に C_2 で $a \ b \ q \rightarrow c$ が適用され、次のステップに内部状態が c に遷移する。時刻 $t = 2$ 時に C_2 で $a \ c \ q \rightarrow d$ が適用され、次のステップに内部状態が d に遷移する。時刻 $t = 3$ 時にセル C_3 で $d \ q \ q \rightarrow b$ が適用され、次のステップに内部状態が b に遷移する。これらの遷移規則を連続して適用する事で、3 ステップにつき 1 セルだけ進行する波が生成される。この状態 b, c, d で構成される速さ $1/3$ の波を a 波と呼ぶ。a 波の存在する位置を時刻 t の関数 $P_a(t)$ で表すと、 $P_a(t) = \lfloor \{t/3\} + 1$ となる。また、時刻 t 時にセル $C_{P_a(t)}$ が取る状態を $S_a(t)$ とすると、 $S_a(t)$ は以下の通り表すことができる。

$$S_a(t) = \begin{cases} b & (t \bmod 3 = 1) \\ c & (t \bmod 3 = 2) \\ d & (t \bmod 3 = 0) \end{cases}$$

a 波はセル空間を右方向に進み続ける。 m を任意の自然数とする。 a_m を単調増加する正整数の数列とし、 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_m = a_{m-2} + a_{m-1} (m \geq 3)$ の場合とする。ある時刻、 $t = a_{m-1}$ 時にセル C_1 の内部状態が状態 a をとり、右方向に進む速さ $1/1$ の波である b 波が生成されるとする。b 波はセル空間を右方向に進み、a 波と衝突する。衝突により、衝突したセルの位置に a_{m-1} が偶数の場合は we 波、奇数の場合は wo 波が生成され、b 波は消滅し、a 波は右方向に進み続ける。we 波、wo 波共には速さが 0、すなわち、その場にとどまり続ける波である。 r を任意の自然数とする。a 波と b 波がセル C_r で衝突したとすると、 $r = P_a(a_{m-1} + r - 1) = \lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1$ となる。よって、we 波、wo 波は $C_{\lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1}$ に生成される。次に、 $t = a_m$ 時にセル C_1 の内部状態が状態 a をとり、右方向に進む速さ $1/1$ の波である b 波が生成されるとする。b 波はセル空間を右方向に進み、 $t = a_{m-1}$ が偶数の場合は we 波と、奇数の場合は wo 波と衝突する。この時、衝突した波が we 波 ($t = a_{m-1}$ が偶数) の場合は即座に、wo 波 ($t = a_{m-1}$ が奇数) の場合は 1 ステップ後に左方向に進む速さ $1/1$ の波、c 波が生成され、we 波もしくは wo 波は消滅し、b 波はそのまま右方向に進み続ける。b 波は右方向に進み続け、a 波と衝突して、we 波もしくは wo 波を生成する。c 波はセル空間を左方向に進み、セル C_1 に到達し、セル C_1 の内部状態が状態 a に遷移し、b 波を生成する。時刻 $t = a_m$ の次にセル C_1 の内部状態が状態 a に遷移する時刻、すなわち時刻 $t = a_{m+1}$ は時刻 $t = a_m$ より、速さ $1/1$ の波がセル C_1 とセル $C_{\lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1}$ の間のセル空間を往復した後となる。セル C_1 で生成された $1/1$ の速さの波がセル $C_{\lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1}$ に到達するには

$\lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1 - 1$ ステップ必要であるので、 a_{m-1} が偶数の場合、 $t = a_{m+1} = a_m + 2 \cdot \{ \lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1 - 1 \} = a_m + a_{m-1}$ となる。また、 a_{m-1} が奇数の場合は c 波を生成する際に 1 ステップ余分にかかるので、 $t = a_{m+1} = a_m + 2 \cdot \{ \lfloor \frac{a_{m-1}}{2} \rfloor + 1 - 1 \} + 1 = a_m + 2 \cdot \{ \frac{a_{m-1}-1}{2} \} + 1 = a_m + a_{m-1}$ となる。すなわち、 $t = a_{m+1} = a_m + 2 \cdot \{ \frac{a_{m-1}}{2} + 1 - 1 \} = a_m + a_{m-1}$ となる。a 波と b 波を衝突した位置に we 波もしくは wo 波でマーキングを行い、セル C_1 と we 波もしくは wo 波の間を b 波、c 波を往復させりことにより、フィボナッチ数列を生成することができる。

3.2 フィボナッチ数列生成アルゴリズムの正当性について

次に、フィボナッチ数列生成アルゴリズムの正当性について考える。時刻 $t = 0$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$0: \underbrace{d}_{[1]} \underbrace{q, \dots, q}_{[2, \dots]}$$

$t = 0$ から $t = 34$ までのフィボナッチ数列の生成は、アルゴリズムに沿わず、内部状態のみで実現している。 $t = 0 \sim 34$ では表 2 に示す遷移規則の部分集合 $P_1 (P_1 \in Q)$ が使用され、図 3 に示す様に遷移を行う。

表 2 状態遷移規則の部分集合 P_1

q d d → c;	d b b → b;	\$ a b → a;
d b c → b;	\$ a c → a;	d b d → b;
q c b → d;	\$ a d → q;	q c d → d;
d a q → a;	\$ q q → q;	\$ q a → q;
d a b → a;	d a c → a;	\$ q c → a;
d a d → a;	\$ q d → a;	d q q → b;
q a a → d;	q a b → q;	q a d → q;
q q q → q;	q q a → q;	q q c → c;
q q d → q;	a d q → c;	a d a → a;
a d b → a;	a d c → a;	a d d → a;
a c q → d;	a c b → c;	a b q → c;
a b c → d;	a b d → d;	a a q → b;
a a c → d;	a q q → b;	b d q → c;
b c q → d;	b c b → c;	b c c → c;
b c d → c;	b b q → c;	b q q → q;
c d q → c;	c d c → d;	c d d → d;
c c q → d;	c c b → c;	c c c → c;
c c d → c;	c b q → c;	c q q → q;
\$ d q → a;	d d q → b;	d d a → d;
d d b → d;	d d c → d;	d d d → d;
d c q → a;	d c b → d;	d c c → d;
q d b → d;	q d c → c;	

図 3 より、時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時にセル C_1 の状態は a となり、時刻 $t = 34$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$34: \underbrace{a}_{[1]} \underbrace{d}_{[2, \dots, 10]} \underbrace{b}_{[11]} \underbrace{c}_{[12]} \underbrace{b}_{[13]} \underbrace{q, \dots, q}_{[14, \dots]}$$

以上より、次の補題を得る。

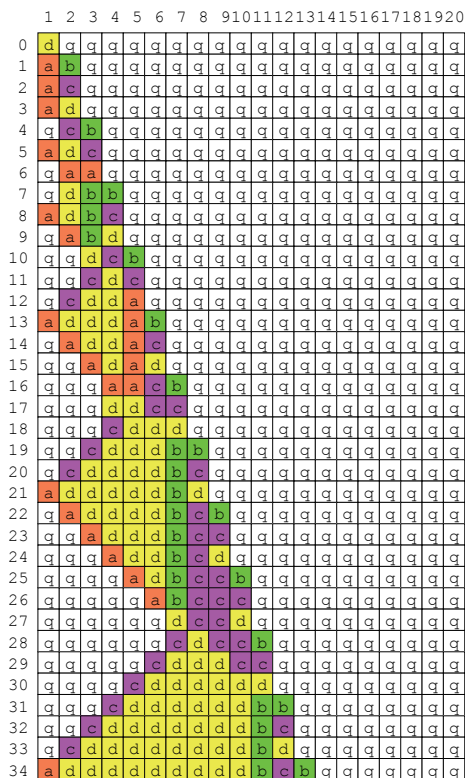


図 3 時刻 $t = 34$ までのシミュレーション状況

補題 1. 状態遷移規則の部分集合 P により, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時に a をとり, 時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時以外は a をとらない. また, 時刻 $t = 34$ の時, M は以下の状態をとる.

$$34 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, 10]}_d \underbrace{[11]}_b \underbrace{[12]}_c \underbrace{[13]}_b \underbrace{[14, \dots]}_{q, \dots, q}$$

次に, 時刻 $t = 34$ 以降のフィボナッチ数列の生成を考える.

補題 2. i を任意の自然数 ($i \geq 1$) とする. F_i を単調増加する正整数の数列とし, $F_1 = 21, F_2 = 34, F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ ($i \geq 3$ の場合) とした場合, 時刻 $t = F_i$ 時に M は以下の状態をとる.

$$F_i : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_i) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_i)]}_{S_a(F_i)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_i) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \quad (F_{i-1} \text{ is an even number.})$$

$$F_i : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_i) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_i)]}_{S_a(F_i)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_i) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \quad (F_{i-1} \text{ is an odd number.})$$

【証明】

(I) 補題 1 より M は $t = 34$ 時に以下の状態を取るのて, $i = 1$ の場合は成立する.

表 3 状態遷移規則の部分集合 P_2

$\$ a d \rightarrow q;$	$a d d \rightarrow a;$	$d d d \rightarrow d;$
$q q q \rightarrow q;$	$\$ q q \rightarrow q;$	$q q a \rightarrow q;$
$q a d \rightarrow q;$	$d d d \rightarrow q;$	$d b c \rightarrow b;$
$b c b \rightarrow c;$	$b c c \rightarrow c;$	$b c d \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$	$d c d \rightarrow c;$
$c b q \rightarrow c;$	$c c q \rightarrow d;$	$c d q \rightarrow c;$
$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow q;$	$d q q \rightarrow b;$
$a d b \rightarrow a;$	$a b c \rightarrow d;$	$\$ q a \rightarrow q;$

$$34 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, 10]}_d \underbrace{[11]}_b \underbrace{[12]}_c \underbrace{[13]}_b \underbrace{[14, \dots]}_{q, \dots, q}$$

(II) k を任意の自然数 ($k \geq 1$) とする. $i = k$ の場合, M は以下の状態をとると仮定する.

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \quad (F_{k-1} \text{ is an even number.})$$

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \quad (F_{k-1} \text{ is an odd number.})$$

まず, F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合を考える. この場合, $t = F_k$ 時に M は次の状態をとる.

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

表 3 に示す Q の部分集合 P_2 により, M は次のように遷移する.

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + 1 : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_a \underbrace{[3, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k + 1) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k + 1)]}_{S_a(F_k + 1)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + 1) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + 2 : \underbrace{[1, \dots, 2]}_q \underbrace{[3]}_a \underbrace{[4, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k + 2) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k + 2)]}_{S_a(F_k + 2)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + 2) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

1 ステップに 1 セルだけ右方向に伝播している状態 a を b 波, セル $C_{\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1}$ にとどまり続ける状態 b を wo 波と

呼ぶ。b波は1/1, a波は1/3の速さで右方向に進み続け、時刻 $t = F_k + \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1 - 1 = F_k + \frac{F_k-1-1}{2}$ にb波がwo波に衝突する。時刻 $t = F_k + \frac{F_k-1-1}{2}$ 時に、Mは以下の状態をとる。

$$F_k + \frac{F_k-1-1}{2} : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_d$$

$$\underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

次に、表4に示すQの部分集合P₃およびP₂により、Mは次のように遷移する。

$$F_{k+1} + \frac{F_k-1}{2} : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_d \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+1} + \frac{F_k-1}{2}) - 1]}_c$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+1} + \frac{F_k-1}{2})]}_{S_a(F_{k+1} + \frac{F_k-1}{2})} \underbrace{[P_a(F_{k+1} + \frac{F_k-1}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + \frac{F_k-1-1}{2} + 1 : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_c \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2]}_d$$

$$\underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 3, \dots, P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + \frac{F_k-1-1}{2} + 3 : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_c$$

$$\underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 3]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 4, \dots, P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) - 1]}_c$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1-1}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

表4 状態遷移規則の部分集合P₃

q q d → q;	q b c → c;	d c c → d;
q c d → d;	c d d → d;	d d c → d;
d c d → d;	d c b → a;	d c q → a;
d d a → d;	a q q → b;	d a a → b;
d a c → a;	d a d → a;	\$ q c → q;

1ステップに1セルだけ左方向に伝播している状態cはc波であり、1ステップに1セルだけ右方向に伝播している状態dはb波である。b波は右方向に進み続け、セルC_{⌊ $\frac{F_k}{2}$ ⌋+1}で衝突し、b波は消滅し、セルC_{⌊ $\frac{F_k}{2}$ ⌋+1}の内部状態がaに遷移し、a波は右方向に進み続ける。セルC_{⌊ $\frac{F_k}{2}$ ⌋+1}は内部状態aを保ち続ける。この内部状態aをwe波と呼ぶ。c波は左方向に進み続け、時刻 $t = F_k + \frac{F_k-1-1}{2} + 1 + \frac{F_k-1-1}{2} = F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$

時に以下の状態をとる。

$$F_{k+1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+1}) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

次に、F_{k-1}が奇数、F_kが奇数の場合を考える。この場合、P₂、表5に示すQの部分集合P₄が使用される。a波とb波が衝突する1ステップ前までは、F_{k-1}が奇数、F_kが偶数の場合と同様の遷移を行い、a波とb波が衝突した際に、セルC_{⌊ $\frac{F_k}{2}$ ⌋+1}の内部状態がbに遷移し内部状態bを保ち続ける。この内部状態bをwo波と呼ぶ。c波、a波の動きはF_{k-1}が奇数、F_kが偶数の場合と同様であり、時刻 $t = F_{k+1}$ 時に以下の状態をとる。

$$F_{k+1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+1}) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

表5 状態遷移規則の部分集合P₄

q q d → q;	q b c → c;	d c c → d;
q c d → d;	c d d → d;	d d c → d;
d c c → d;	d d q → b;	d c q → a;
d d b → d;	b b c → b;	d b b → b;
d b c → a;	d b d → b;	\$ q c → q;

最後に、F_{k-1}が偶数、F_kが奇数の場合を考える。この場合、 $t = F_k$ 時にMは次の状態をとる。

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

表6に示すQの部分集合P₅により、以下の様に遷移を行う。

$$F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k) - 1]}_c$$

$$\underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + 1 : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_a \underbrace{[3, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+1}) - 1]}_c$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})} \underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + 2 : \underbrace{[1, \dots, 2]}_{q, \dots, q} \underbrace{[3]}_a \underbrace{[4, \dots, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+2}) - 1]}_c$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+2})]}_{S_a(F_{k+2})} \underbrace{[P_a(F_{k+2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

表 6 状態遷移規則の部分集合 P_5

d b c → b;	\$ a d → q;	q c d → d;
d a q → a;	\$ q q → q;	\$ q a → q;
d a b → a;	d a c → a;	\$ q c → a;
d a d → a;	d q q → b;	q a b → q;
q a d → q;	q q q → q;	q q a → q;
q q c → c;	q q d → q;	a d q → c;
a d b → a;	a d d → a;	a c q → d;
a b q → c;	a b c → d;	a q q → b;
b c b → c;	b c c → c;	b c d → c;
b q q → q;	c d q → c;	c d c → d;
c d d → d;	c c q → d;	c c b → c;
c c c → c;	c c d → c;	c b q → c;
c q q → q;	d d a → d;	d d b → d;
d d c → d;	d d d → d;	d c q → a;
d c b → d;	d c c → d;	d c d → d;
q d c → c;		

F_{k-1} が奇数の場合と同様に b 波が生成され、右方向に速さ $1/1$ で進む。セル $C_{\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1}$ にとどまり続ける状態 a を we 波と呼ぶ。b 波は $1/1$, a 波は $1/3$ の速さで右方向に進み続け、時刻 $t = F_k + \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1 - 1 = F_k + \frac{F_{k-1}}{2}$ に b 波が we 波に衝突する。時刻 $t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}$ 時に、 M は以下の状態をとる。

$$F_k + \frac{F_{k-1}}{2} : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_{d, d}$$

$$[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1] \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

b 波と we 波の衝突後、 M は以下の様に遷移する。

$$F_k + \frac{F_{k-1}}{2} : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_{d, d}$$

$$[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1] \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1 : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_c \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2]}_{d, d}$$

$$[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3, \dots, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1] \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q} \Rightarrow$$

$$F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1 : \underbrace{[1, \dots, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_c \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, \dots, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3]}_{d, \dots, d}$$

$$[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 4, \dots, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1] \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

F_{k-1} が奇数の場合と同様に c 波が生成され、b 波は右方

向に進み続ける。a 波と b 波が衝突した際に、セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ の内部状態が b に遷移し wo 波が生成される。c 波, a 波の動きは F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合と同様であり、時刻 $t = F_{k+1}$ 時に以下の状態をとる。

$$F_{k+1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \dots, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d, \dots, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, \dots, P_a(F_{k+1}) - 1]}_c \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})}$$

$$\underbrace{[P_a(F_{k+2}) + 1, \dots]}_{q, \dots, q}$$

以上より、 $i = k$ の場合に成立すると仮定すると、 $i = k + 1$ の場合も成立する。

(I), (II) より、すべての i において補題 2. が成立する。□

補題 1, 補題 2 よりセル C_1 の内部状態は時刻 $t = a_m$ 時に状態 a をとる。以上より以下の定理を得る。

定理 3. 表 1 で与える遷移規則集合により、5 状態 CA 上でフィボナッチ数列を生成する事ができる。

コンピュータ上に表 1 に示す遷移規則集合を実装し、 $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い、正当性を確認した。図 4 に時刻 $t = 0 \sim 76$ のシミュレーション結果を示す。

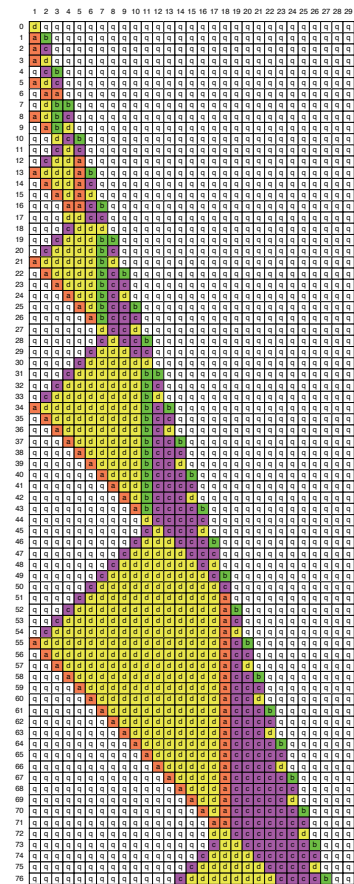


図 4 時刻 $t = 76$ までのシミュレーション状況

4. おわりに

本稿では, CA 上の数列生成問題についての考察を行った. 5 状態 CA 上のフィボナッチ数列生成アルゴリズムを明らかにし, その正当性に言及した. 今後の課題としては, 内部状態数についての考察及びセル間通信量を制限した CA のモデル上のフィボナッチ数列生成アルゴリズムの考察があげられる.

参考文献

- [1] M. Arisawa: On the generation of integer series by the one-dimensional iterative arrays of finite state machines, *The Trans. of IECE*, Vol. 54-C, No.8, pp.759-766, 1971 (in Japanese).
- [2] N. Kamikawa and H. Umeo: Some algorithms for real-time generation of non-regular sequences on one-bit inter-cell-communication cellular automata, *Proc. of SICE Annual Conference 2007*, pp.953-958, 2007.
- [3] N. Kamikawa and H. Umeo: Some state-efficient algorithms for real-time generation of non-regular sequences on cellular automata, *Proc. of the 13th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.47-50, 2008.
- [4] N. Kamikawa and H. Umeo: A note on sequence generation power of two-states cellular automata, *Proc. of SICE Annual Conference 2008*, pp.3315-3320, 2008.
- [5] N. Kamikawa and H. Umeo: A Study on Sequence Generation Powers of Small Cellular Automata, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.5, No.4, pp.191-199, 2012.
- [6] N. Kamikawa and H. Umeo: A Design of Algorithms for Real-Time Generation of Linear-Recursive Sequences on Cellular Automata. *Proc. of the 14th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.281-286, 2009.
- [7] I. Korec: Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 9 states, *Proc. of the 2nd International Colloquium on Universal Machines and Computations*, pp.101-116, 1998.
- [8] J. von Neumann: *Theory of Self-Reproducing Automata*, A. W. Burks, Ed., p. 388, Univ. of Illinois Press, 1968.
- [9] H. Umeo and N. Kamikawa: A design of real-time non-regular sequence generation algorithms and their implementations on cellular automata with 1-bit inter-cell communications, *Fundamenta Informaticae*, Vol.52, No. 1-3, pp.257-275, 2002.
- [10] H. Umeo and N. Kamikawa: Real-time generation of primes by a 1-bit-communication cellular automaton, *Fundamenta Informaticae*, Vol.58, No. 3-4, pp.421-435, 2003.