

## 遅延ジッタの確率的な一評価方法について

江部 文隆<sup>†</sup> 今井 博英<sup>††</sup> 角山 正博<sup>†††</sup>

マルチメディアデータのように、データ処理時間に制限が課されているシステムにおける平均遅延時間とジッタを求める方法を示す。本方法では一般化確率ペトリネット (GSPN) によってモデル化されたコンピュータシステムのモデルを用いて縮約可達グラフを求め、グラフから得られる処理の経路に基づき本稿に示した式を用いて平均遅延時間とジッタ (標準偏差) を導出する。また、ネットワークゲームを処理するシステムに本方法を適用した例をあわせて示す。

## A Probabilistic Evaluation Method for Delay-jitter Analysis

FUMITAKA EBE,<sup>†</sup> HIROEI IMAI<sup>††</sup> and MASAHIRO TSUNOYAMA<sup>†††</sup>

This paper proposes a probabilistic evaluation method for system analysis. Mean delay time and jitter (standard deviation of delay time) of processing time in a system can be obtained using the equations shown in the paper and the GSPN (Generalized Stochastic Petri Net) model for the system. An example of evaluation for a system processing network game is also shown in the paper.

## 1. はじめに

コンピュータネットワークを用いた画像配信やネットワークゲームのような、音声や動画等のリアルタイム性を持つデータを扱うサービスが普及しつつある。また、このようなサービスにおけるデータの品質を確保するために、データに応じて優先的に処理を行う QoS 制御が用いられるようになりつつある<sup>1)</sup>。このようなシステムの性能を評価するために、従来のスループットやデータの損失あるいは誤り等に加えて、データの処理が終了するまでの時間 (遅延時間) の平均値やその変動 (ジッタ) の評価が求められている。

遅延時間の評価には、広く用いられているシミュレーションによる方法のほかに、待ち行列モデルを用いた文献 2) や 3) 等がある。しかし、待ち行列モデルを用いてシステムをモデル化するのは容易ではなく、またシミュレーションによってジッタを高精度で求めた

めには、多数回の試行を必要とするため長い時間と多くの費用が必要になるという問題がある。これらの問題点に対処するために、比較的容易にシステムをモデル化できる一般化確率ペトリネット (GSPN) を用いてシステムをモデル化し、モデルに基づいて解析的に遅延時間の平均値とジッタを求める方法が検討されている<sup>4),5)</sup>。

本稿では QoS 制御を行うシステムを評価するために、GSPN を用いてモデル化されたコンピュータシステムにおける遅延時間の平均値とジッタを求める方法を示し、そのための式を導出する。なお、ここでは遅延時間の平均値からの差分をジッタと呼び、遅延時間の標準偏差によってこれを評価する。最後に提案する方法を用いてネットワークゲームを処理するシステムを評価した例を示す。

## 2. 一般化確率ペトリネットと可達グラフ

一般化確率ペトリネット (GSPN) はブレース、トランジション、ブレースとトランジションを結ぶアーク、およびトークンからなる<sup>6)</sup>。トランジションは発火条件が満たされたときにただちに発火する瞬間トランジションと、確率的に決まる時間の後に発火する時間トランジションに分けられる。ペトリネットの各ブレースにトークンを割り当てることをマーキングとい

<sup>†</sup> 新潟大学大学院自然科学研究科  
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

<sup>††</sup> 新潟大学工学部情報工学科  
Department of Information Engineering, Niigata University

<sup>†††</sup> 新潟工科大学  
Niigata Institute of Technology

い、発火可能なトランジションが発火することによってマーキングが変化する。マーキング  $M_a$  から発火を繰り返すことによって到達できるマーキングの集合を可達集合  $RS(M_a)$  と呼び、可達集合のすべてのマーキングを含む被覆グラフを可達グラフという。

GSPN には時間トランジションだけを発火可能にするタンジブルマーキングと、瞬間トランジションを発火可能にするパニングマーキングがある。GSPN の可達グラフは、パニングマーキングを縮約することによってマルコフ連鎖の状態遷移図に対応させることができる。本稿では、縮約された可達グラフのマーキングと、マルコフ連鎖の状態遷移図を同じ意味で用いる。

### 3. 遅延ジッタの解析

#### 3.1 処理の経路

優先度に基づいて処理を行うクライアントサーバシステムを考える。あるホストで処理の要求が発生すると要求がサーバに伝えられ、サーバでは優先順位を考慮したスケジューリングが行われる。サーバの処理が終了すると、結果は再び処理を要求したホストに返される。GSPN を用いたシステムのモデルにおいては、このような一連の動作が前章で述べた発火の系列で表される。すなわち、処理要求の発生に対応するトランジションの発火によって処理要求の発生が表され、処理結果の受け取り完了に対応するトランジションの発火によって処理がすべて終了したことが表される。したがって、処理要求が発生してから処理が終了するまでの発火の系列の滞在時間を求めることによって遅延時間を求めることができる。また、システム中では他のホストの処理要求の発生によって処理状況が変わるため、このような経路は複数存在する。このような処理の経路を次のように定義する。なお、処理要求の発生間隔および処理時間は指数分布に従うものとする。

**定義 1** 縮約可達グラフ上のマーキング  $M_s$  を始点とし、 $M_e$  を終点とする発火系列中のトランジションとマーキングからなる系列 ( $M_s[t_\alpha > \dots t_\beta > M_e$ ) を  $M_s$  から  $M_e$  に至る経路 (以下単に経路) と呼び、 $M_s$  を始点マーキング、 $M_e$  を終点マーキングという。また、 $M_s$  から  $M_e$  に至る経路が  $N_{se}$  個存在するとき、経路を  $P_{se}^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq N_{se}$ ) と表す。

ただし、経路中のマーキングは図 1 に示すように、 $M_s$  は処理要求が発生可能な状態、 $M_a$  は要求が発生した結果遷移した状態、 $M_b$  は最後の処理が実行中である状態、 $M_e$  は処理が終了して遷移した状態を表す。処理が開始されてから終了するまでの時間は、図 1 に

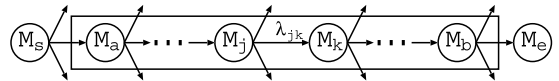


図 1 処理の経路  
Fig. 1 Processing path.

示す発火系列のマーキング  $M_a$  から  $M_b$  までの滞在時間の和によって表される。これを始点マーキング  $M_s$  から終点マーキング  $M_e$  に至る経路の滞在時間と呼び、 $T_{se}^{(i)}$  と表す。なお、ここで  $T_{se}^{(i)}$  には始点マーキング  $M_s$  と終点マーキング  $M_e$  の滞在時間は含まれていない。

#### 3.2 経路の選択率

複数の経路があるとき、実際の処理はその中の唯一の経路に沿って実行され、どの経路が選択されるかは確率的に決まる。また、経路に沿った処理が行われる頻度は、始点マーキング  $M_s$  に遷移する回数によって決まる。経路  $i$  に沿った処理が行われる平均回数を経路  $i$  の選択率と呼び、 $R(P_{se}^{(i)})$  と表す。これは次の補題で与えられる。ここで  $P(M_s)$  はマーキング  $M_s$  の定常確率である。

**補題 1** 経路の選択率

$$R(P_{se}^{(i)}) = \Lambda_{M_s} \times P(M_s) \times \prod_{j=s}^b \frac{\lambda_{jk}}{\Lambda_j}$$

$$\Lambda_j = \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{ji}$$

(証明) マーキング  $M_j$  から  $M_k$  へ遷移する確率は、 $M_j$  から出て行く推移率の総和  $\Lambda_j$  と  $M_k$  への推移率  $\lambda_{jk}$  の比によって決まる。また、経路上のマーキング  $M_j$  の滞在時間  $t$  が次式の確率密度関数に従い、 $M_s$  の平均滞在時間が平均  $1/\Lambda_{M_s}$  の指数分布に従うことから<sup>7)</sup> 補題が成り立つ。

$$p_{M_j}(t) = \Lambda_j \exp(-\Lambda_j t)$$

#### 3.3 平均遅延時間とジッタ

経路上のマーキング  $M_j$  の滞在時間  $t$  が平均  $1/\Lambda_j$  の指数分布に従うことから、経路全体の滞在時間の確率密度関数は図 1 中の  $M_a$  から  $M_b$  までの確率密度関数の畳み込みにより求めることができる。この畳み込みを行うために、まず経路上で推移率の総和が等しいマーキングどうしをまとめてアーラン分布で表す。マーキング  $M_j$  の推移率の総和を  $\Lambda_j$  とし、これと等しい推移率の総和を持つマーキングが  $n_j$  個あるとき、これらのマーキングの滞在時間の和は  $n_j$  相アーラン分布で表される。したがって、経路中に推移率の異なるマーキングが  $l$  種類あるとき、経路の滞在時間

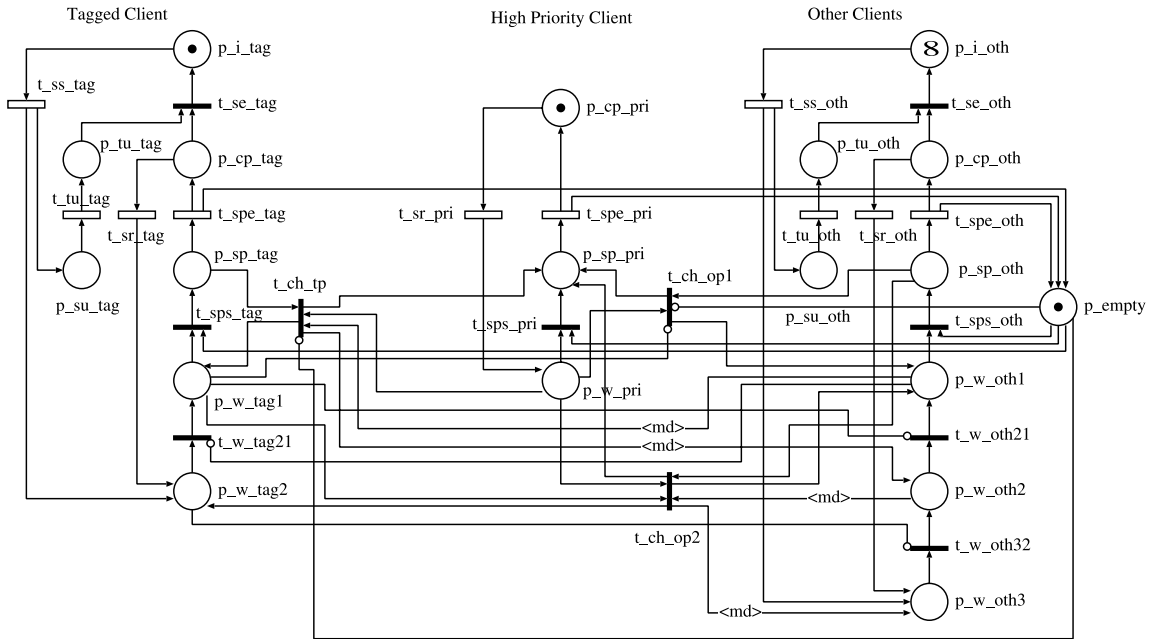


図 2 解析例の GSPN モデル  
Fig. 2 GSPN model of the example.

の原点まわりの 1 次および 2 次モーメントは次の補題  
で与えられる。

補題 2 経路の滞在時間の原点まわりの 1 次および  
2 次モーメント

$$E(T_{se}^{(i)}) = \prod_{j=1}^l \Lambda_j^{n_j} \left\{ \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \left( c_{kr} \frac{r}{\Lambda_k^{r+1}} \right) \right\}$$

$$E(T_{se}^{(i)2}) = \prod_{j=1}^l \Lambda_j^{n_j} \left\{ \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \left( c_{kr} \frac{r(r+1)}{\Lambda_k^{r+2}} \right) \right\}$$

$$c_{kr} = \frac{1}{(n_k - r)!} \lim_{s \rightarrow -\Lambda_k} \left[ \sum_{u=0}^{n_k - r} n_{k-r} C_u \left( \sum_{v=0}^u C_v \left( \dots \sum_{w=0}^u C_w \left( g_1^{(u)} g_2^{(v)} \dots g_l^{(w)} \right) \dots \right) \right) \right]$$

$$g_j = \frac{1}{(s + \Lambda_j)^{n_j}}$$

(証明) 付録 1 参照

処理の要求が発生してから処理結果を受け取るまでの遅延時間  $\tau$  の平均値  $E[\tau]$  とその分散  $V[\tau]$  は次の定理で与えられる。ここで、 $A$  は始点マーキングと終点マーキングの順序対からなる集合である。

定理 1 遅延時間の平均値とその分散

$$E[\tau] = \frac{\sum_{(s,e) \in A} \sum_{i=1}^{N_{se}} [R(P_{se}^{(i)}) E(T_{se}^{(i)})]}{\sum_{(s,e) \in A} \sum_{i=1}^{N_{se}} R(P_{se}^{(i)})}$$

$$V[\tau] = \frac{\sum_{(s,e) \in A} \sum_{i=1}^{N_{se}} [R(P_{se}^{(i)}) E(T_{se}^{(i)2})]}{\sum_{(s,e) \in A} \sum_{i=1}^{N_{se}} R(P_{se}^{(i)})} - E[\tau]^2$$

(証明) 補題 1 および 2 より明らか。

#### 4. 解析例と評価

クライアントに優先順位が定められているネットワークゲームを処理するシステムを取り上げる。ただし、説明を簡単にするためにネットワーク部分については省略してある。このシステムは高優先度のクライアント 1 台、低優先度のクライアント 9 台、およびサーバ 1 台の計 11 台のホストからなっており、ここでは低優先度のクライアントに対する平均遅延時間とジッタを求める。このシステムでは、各クライアントがサービスを利用するときにサーバへ接続してセッションを確立し、クライアントはサービスを利用している間サーバへの処理要求を頻繁に行う。なお、サー

パへのセッション確立要求および処理要求はポアソン分布に従うものとし、サーバの処理時間は指数分布に従うものとする。

このシステムの GSPN を用いたモデルを図 2 に示す。モデル中の Tagged Client が解析の対象となるクライアントであり、High Priority Client が高優先順位のクライアントを、Other Clients が同じ優先順位の他のクライアントを表している。トランジション  $t_{sr\_tag}$  の発火によって Tagged Client からの処理要求の発生が表され、 $t_{sps\_tag}$  の発火によってサーバでの処理の開始が、また  $t_{spe\_tag}$  の発火によってサーバでの処理の終了が表される。また、ここではサービスを利用していない時間を表す  $t_{ss\_tag}$  の発火遅延およびサービスの継続時間を表す  $t_{tu\_tag}$  の発火遅延を 60 [sec] に、処理時間の平均値を 0.01 [sec] と 0.02 [sec] の 2 通りに設定している。処理要求の発生間隔を 0.05 [sec] から 1.0 [sec] まで変化した場合の解析結果とシミュレーション結果を図 3、図 4 に示す。なお、モデルから縮約可達グラフを求める際に TimeNET<sup>(8)</sup> を用いている。

図から明らかなように、本方法によって求めた値とシミュレーションから得られた値はほぼ一致している。この結果から、要求発生間隔が短くなるに従って平均遅延時間とジッタが増加するが、要求発生間隔が 1 [sec] と 0.05 [sec] の場合を比較すると、平均処理時間が 0.02 [sec] の場合には平均遅延時間およびジッタともに約 60% 増加し、平均処理時間が 0.01 [sec] になった場合には約 28% 程度におさまっていること等を解析できる。

5. む す び

QoS 制御を行うシステムを評価するために、優先度に従って処理を行う GSPN を用いてモデル化されたシステムについて、モデルから導出した縮約可達グラフを用いて遅延時間の平均値とジッタを解析的に求める方法を示した。また、本方法をネットワークゲームを処理するシステムに適用した例を示し、シミュレーションによる値とほぼ等しい結果が得られることを示した。本方法を用いることによって、多数回のシミュレーションを繰り返すことなく、精度の高いジッタを求めることができる。

今後は、平均値とジッタを求める際の繰返し計算アルゴリズムを改良して処理の高速化を図るとともに、本稿に示した例以外のシステムに適用して本方法を評価する予定である。

参 考 文 献

- 1) Shin, J., Lee, D.C. and Kuo, C.-C.J.: *Quality of Service for Internet Multimedia*, Prentice Hall, New Jersey (2004).
- 2) Kato, J., Shimizu, A. and Goto, S.: End-to-End Delay Distribution on the Internet, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol.E82-Q, No.4, pp.762-768 (1999).
- 3) Oliner, A.J., Rudolph, L., Sahoo, R.K., Moreira, J.E. and Gupta, M.: Probabilistic QoS Guarantee for Super Computing Systems, *Proc. Internat. Conf. on Dependable Systems and Networks (DSN2005)*, pp.634-643 (2005).
- 4) German, R.: *Performance Analysis of Communication Systems*, Wiley (2000).
- 5) Ikeda, N., Imai, H., Tsunoyama, M. and Ishii, I.: An Evaluation of Mean Delay and Jitter for 802.11e WLAN, *Supplemental Volume of the 2005 Internat. Conf. on Dependable Systems and Networks*, pp.32-33 (2005).
- 6) Marsan, M.A., Conte, G.B.G., Donatelli, S. and Franceschinis, G.: *Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets*, John Wiley and

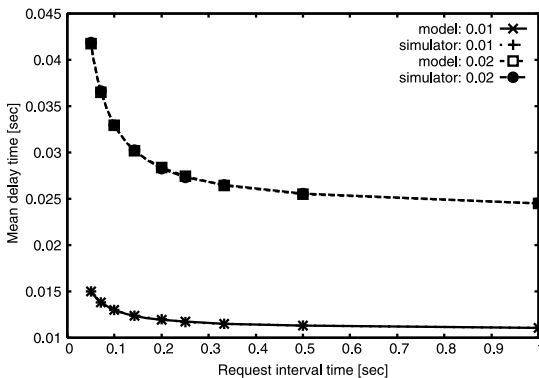


図 3 平均遅延時間  
Fig. 3 Mean delay time.

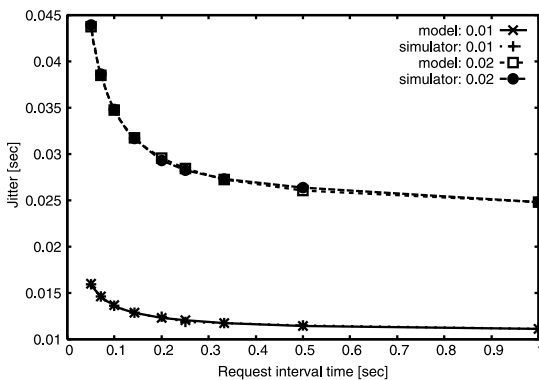


図 4 ジッタ  
Fig. 4 Jitter.

Sons (1996).

7) Durrett, R.: *Essentials of Stochastic Process*, Springer-Verlag (1999).

8) <http://pdv.cs.tu-berlin.de/timenet/>

## 付 録

### A.1 補題 2 の証明

推移率の総和が  $\Lambda_j$  であるマーキングが  $n_j$  個あつたとき、これらのマーキングの滞在時間は

$$f_j(t) = \frac{1}{(n_j - 1)!} \Lambda_j t^{n_j - 1} \exp(-\Lambda_j t)$$

の  $n_j$  相アラン分布に従う。

経路  $P_{se}^{(i)}$  内の発火率が  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_l$  の  $l$  種類あるとき、この経路の滞在時間の確率密度関数は

$$f(T_{se}^{(i)}) = f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_l(t)$$

となる。ここで、 $f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_l(t)$  についてラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}(f_1(t) * \dots * f_l(t)) = \frac{\Lambda_1^{n_1} \dots \Lambda_l^{n_l}}{(s + \Lambda_1)^{n_1} \dots (s + \Lambda_l)^{n_l}}$$

となる。さらにこれを部分分数展開をすると、

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^l \Lambda_j^{n_j} \left\{ \left( \frac{c_{11}}{s + \Lambda_1} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(s + \Lambda_1)^{n_1}} \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{c_{l1}}{s + \Lambda_l} + \dots + \frac{c_{ln_l}}{(s + \Lambda_l)^{n_l}} \right) \right\} \\ & = \prod_{j=1}^l \Lambda_j \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \frac{c_{kr}}{(s + \Lambda_k)^r} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$c_{kr} = \lim_{s \rightarrow -\Lambda_k} \frac{d^{n_k - r}}{ds^{n_k - r}} \left\{ \frac{(s + \Lambda_k)^{n_k}}{(s + \Lambda_1)^{n_1} \dots (s + \Lambda_m)^{n_m}} \right\} \frac{1}{(n_k - r)!}$$

である。ここでライプニッツの公式を用いて展開した後逆ラプラス変換すると、

$$f_1(t) * \dots * f_l(t) = \prod_{j=1}^l \Lambda_j \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \left( \frac{c_{kr}}{(r-1)!} t^{r-1} \exp(-\Lambda_k t) \right)$$

となる。これより、滞在時間の原点まわりの 1 次モーメントは

$$\begin{aligned} E(T_{se}^{(i)}) & = \int_0^\infty t \{f_1(t) * \dots * f_l(t)\} dt \\ & = \prod_{j=1}^l \Lambda_j^{n_j} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \left( c_{kr} \frac{r}{\Lambda_k^{r+1}} \right) \end{aligned}$$

となる。同様に、滞在時間の原点まわりの 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} E(T_{se}^{(i)2}) & = \int_0^\infty t^2 \{f_1(t) * \dots * f_l(t)\} dt \\ & = \prod_{j=1}^l \Lambda_j^{n_j} \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^{n_k} \left( c_{kr} \frac{r(r+1)}{\Lambda_k^{r+2}} \right) \end{aligned}$$

となる。

(平成 18 年 10 月 24 日受付)

(平成 19 年 4 月 6 日採録)



江部 文隆

平成 17 年新潟大学工学部情報工学科卒業。現在、同大学大学院自然科学研究科に在学中。ネットワークシステムの性能評価に関する研究に従事。電子情報通信学会会員。



今井 博英

平成 5 年新潟大学工学部情報工学科卒業、平成 7 年同大学大学院修士課程修了、平成 10 年同大学院自然科学研究科博士後期課程修了、平成 10 年同大学院自然科学研究科助手、現在同大学工学部情報工学科助手。ネットワークシステムの性能評価の研究に従事。平成 10 年工学博士。電子情報通信学会会員。



角山 正博 (正会員)

昭和 44 年新潟大学工学部電子工学科卒業。同年東京芝浦電気(株)入社。昭和 46 年ヒューレットパッカー(株)入社。主に測定器の研究開発に従事。長岡技術科学大学教務職員、助手、長岡工業高等専門学校教授を経て、現在、新潟工科大学教授。デペンダブルシステム、コンピュータネットワークの性能評価と高信頼化、リアルタイムシステム等の研究に従事。平成 2 年工学博士。IEEE 等会員。